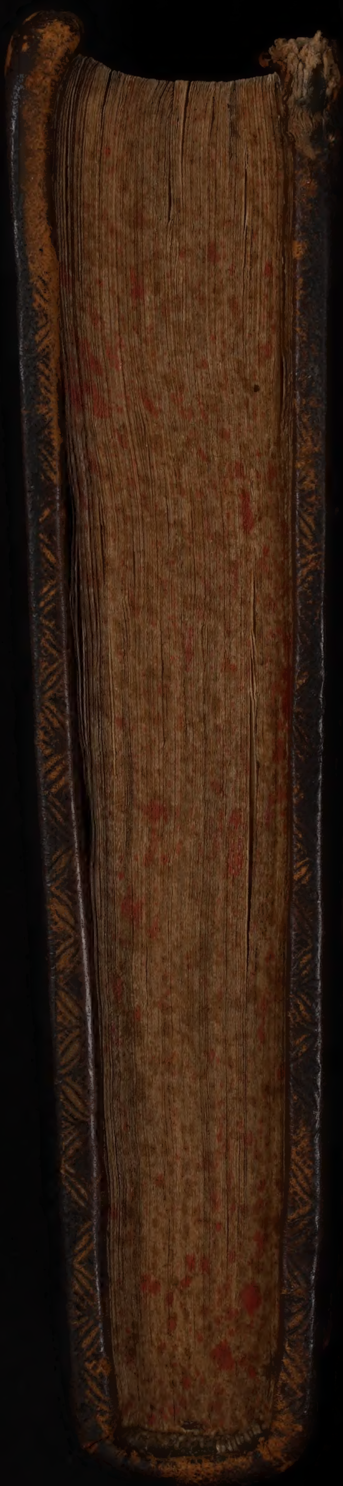
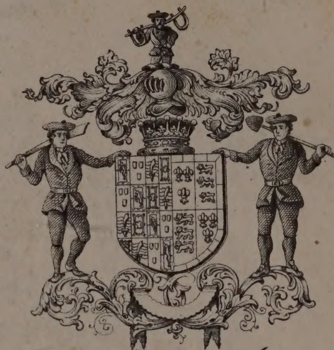
SCIENCE
DES
NOMBRES







L'ART ET LA SCIENCE DES NOMBRES.

L'ART ET LA SCIENCE DES NOMBRES

EN FRANCOIS ET EN LATIN:

OU

L'ARITHMETIQUE PRATIQUE ET SPECULATIVE

EN VERS LATINS

EXPLIQUE'E PAR DES QUESTIONS.

DIVISE'E EN DEUX PARTIES.

COMPRISE EN DIX LIVRES, DONT LES SEPT Premiers contiennent l'Arithmetique ordinaire, avec la Theorie des Nombres, telle qu'elle est dans les anciens Auteurs Grecs & Latins, principalement dans les V. VII. VIII. & IX. des Elemens d'Euclide, & dans les deux Livres de Boëce. Les Trois derniers enseignent L'ALGEBRE par une methode courte & facile, & donnent des Maximes pour découvrir les Nombres inconnus, aussi bien par l'Arithmetique ordinaire, que par l'Algebre.

AVEC UNE PREFACE

De l'Excellence de l'Arithmetique, & de son utilité pour aider à former le jugement.



A PARIS,

Chez LAMBERT ROULLAND, Imprimeur-Libraire ordinaire de la Reyne, ruë du Foin, aux Armes de la Reyne.

ET

CHRISTOPHE BALLARD, seul Imprimeur du Roy pour la Musique, ruë S. Jean de Beauvais, au Mont de Parnasse.

M. DC. LXXVII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Extrait du Privilege du Roy.

PAR Grace & Privilege du Roy, en datte du quatriéme de Mars 1677. Signé, BOCTOIS. Il est permis au Sieur RENE' OUVRARD, Maître de la Musique de la Sainte Chapelle de Paris, de faire imprimer, vendre & debiter en tous les lieux de l'obeïssance de Sa Majesté, par tel Imprimeur & Libraire qu'il voudra choisir, en tant de volumes, marges, caracteres, & autant de fois que bon luy semblera, un Ouvrage de Musique en François & en Latin; intitulé, *La Musique rétablie depuis son origine, & l'Histoire des divers progrez qui s'y sont faits jusqu'à nostre temps; avec l'explication de tous les Auteurs Grecs, Latins, François, Italiens, Allemans, Espagnols, & Anglois, qui en ont traité ou à dessein ou par occasion, & toute sa Theorie & Pratique tant ancienne que moderne: Avec plusieurs Traitez particuliers qui regardent cette Science, comme de Physique, Arithmetique, Rhetorique, Poëtique, & Rhythmique*, pendant vingt années consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois: Et deffences sont faites à tous Imprimeurs, Libraires ou autres, d'imprimer, vendre & distribuer ledit Livre, ny partie d'iceluy sans son consentement exprés, ou de ceux qui auront droit de luy, à peine de trois mille livres d'amende, & de tous dépens, dommages & interests, comme il est porté plus amplement par ledit Privilege.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires, Imprimeurs de Paris, le 22. Mars 1677. suivant l'Arrest du Parlement du 8. Avril 1653. & celuy du Conseil Privé du Roy, du 27. Février 1665. Signé, THIERRY, Syndic.





PREFACE.

De l'Excellence de l'Arithmetique, & de son utilité pour aider à former le jugement.



E pourrois bien me dispenser icy de faire une Preface, s'il ne s'agissoit que de rendre raison de l'ordre & du dessein de cet Ouvrage, puisque le premier Livre, qui suit la Preface Latine, y satisfait pleinement. Mais je me sens obligé de prevenir d'abord ceux qui n'ont qu'une basse idée de l'Arithmetique, & qui ne regardent sa Theorie que comme un amusement d'esprit, & sa Pratique que comme une occupation mécanique de tres-peu d'utilité. Ceux qui sont dans cette disposition, s'étonneront sans doute de voir le soin que j'ay pris de rendre considerable par la matiere & par la forme, un Art pour lequel ils ont si peu d'estime. Et comme je sçay qu'ils n'ont formé cette idée que parcequ'ils n'ont jamais veu l'Arithmetique que par ses dehors; j'ose aucontraire me promettre, que quand ils auront entendu les raisons qui m'ont engagé à cette entreprise, quand ils auront appris les découvertes que j'ay faites dans la Science des Nombres, & qu'ils auront connu l'étenduë & la puissance de cet Art, & le fruit qui en doit revenir au Public, ils s'étonneront eux-mesmes d'avoir eu des sentimens si peu favorables pour une Science si noble, si relevée, & si digne de l'esprit de l'homme.

Je diray donc, qu'ayant entrepris un plus grand Ouvrage sur

une autre matiere, où l'Arithmetique estoit necessaire pour l'intelligence d'une de ses parties, je n'en voulois faire qu'un Abregé. Mais ayant trouvé un fonds inépuisable dans les Nombres, je me suis veu insensiblement engagé de remonter jusqu'à leur source, c'est à dire d'en penetrer les proprietez, la puissance & les secrets, en un mot la Theorie, telle qu'elle est non seulement dans les Livres des anciens Auteurs Grecs & Latins, comme Euclide, Nicomaque, Theon & Boëce ; mais telle encore qu'on la peut découvrir par la meditation, & dans les reflexions des nouveaux Theoriciens. Et je l'ay d'autant plus volontiers embrassée, que je la voy negligée par tous les Praticiens de ce temps, qui mettent tous les jours en lumiere des Arithmetiques, pour n'en donner tout au plus que cinq ou six Regles. A l'égard d'Euclide, j'ay pris son cinquiéme Livre des Proportions, les VII. VIII. & IX. des Nombres, & les ay mis en Vers Latins dans un ordre plus naturel, mieux suivy, & plus methodique.

Cette Theorie des Nombres m'a porté encore plus avant, & enfin m'a conduit jusqu'à l'Algebre dont le nom m'estoit inconnu, comme il l'est encore à plusieurs qui mesme sçavent l'Arithmetique. En attendant que j'en parle à fonds en son lieu, il faut dire en peu de paroles ce qu'on entend par ce mot. L'Algebre est un Art de l'invention des derniers Grecs Egyptiens, ou des Arabes, d'où il a emprunté son nom, qui marque, dans l'opinion de quelques-uns, celuy de son principal Auteur, ou son principal effet, qui est de remettre au jour le nombre qui estoit caché. Cet Art commence où l'Arithmetique ordinaire finit pour la découverte des Nombres inconnus, & sert à resoudre toutes les questions possibles sur les Nombres, que l'Arithmetique ordinaire ne peut resoudre. On l'a rendu si obscur, que tout le monde s'en est rebuté. J'ay tâché de faire icy deux choses : La premiere, de le rendre intelligible ; & l'autre, de trouver dans la Theorie des Nombres, des Maximes qui fassent le mesme effet que l'Algebre. Si je ne les ay pas toutes trouvées, je croy avoir donné assez d'ouverture pour en découvrir tant qu'on voudra, à mesure qu'on approfondira dans cette Science, qui est, comme je l'ay dit, inépuisable, & qui contient des tresors infinis & surprenans, comme on le verra dans le corps de ce Traité.

Au reste, comme nous ne devons pas regarder les Sciences seu-

lement par ce qu'elles ont d'agréable & de curieux, mais par l'utilité qui nous en revient; j'entens l'utilité qui sert à former ou nos mœurs, ou nostre jugement: il y a lieu d'esperer que cette Arithmetique accompagnée de la Theorie des Nombres, sera bien receuë du Public, puisqu'elle peut produire puissamment le dernier de ces effets, c'est à dire, donner une grande penetration d'esprit; mettre de la clarté dans nos idées, par l'ordre & l'arrangement des choses qu'elle distingue & separe les unes d'avec les autres; nous preparer aux autres Sciences où elle est necessaire; enfin nous élever, pour ainsi dire, au dessus de nostre nature, & nous faire approcher de celle des Anges, par l'habitude de raisonner indépendemment des sens, qui est particuliere à l'Arithmetique par dessus toutes les autres Sciences. C'estoit là le sentiment de ces Grands-hommes de l'antiquité qui nous ont precedé beaucoup plus par leur science, que par le temps qui nous a si fort éloigné d'eux; & principalement des Pythagoriciens qui mettoient toute leur Philosophie dans les Nombres. C'estoit aussi le sentiment de Platon, qui reduisant en ordre les Arts & les Sciences necessaires pour l'instruction de la jeunesse, en faisoit deux Classes; l'une de celles qui servent à former l'esprit & les mœurs des hommes, pour les rendre raisonnables, doux & humains; l'autre de celles qui les élevent au dessus d'eux-mesmes, & les font devenir, disoit-il, les Dieux des autres hommes. Dans la premiere Classe il mettoit la Grammaire, la Musique, la Danse, les Exercices du corps, & les Loix. La Grammaire pour instruire les enfans par la lecture des anciens Poëtes, où l'on leur proposoit l'imitation des actions vertueuses des Heros: La Musique pour adoucir leur naturel, estimant que sans elle les hommes n'estoient que des bestes farouches: La Danse pour regler leurs gestes, le port de leurs corps, & donner de l'air & de la bonne grace à toutes leurs actions: Les Exercices du corps, pour les rendre adroits & robustes; Enfin l'Etude des Loix divines & humaines, pour leur apprendre la pieté envers leurs Dieux, le respect envers leurs parens, l'obeïssance aux Magistrats, l'amour de la Patrie, & les devoirs de la societé civile. Dans la seconde Classe il mettoit l'Arithmetique, la Geometrie, & l'Astronomie. *Il y a encore*, disoit-il au septiéme Livre des Loix, *trois Sciences que doivent apprendre les enfans: La premiere,*

celle des Nombres : La seconde, celle qui mesure la longueur, la largeur, & la profondeur : Et la troisiéme, celle qui considere le cours des Astres. Et quoyque peu de gens les apprennent toutes trois exactement, il est neanmoins honteux d'ignorer ce que tout le monde devroit necessairement sçavoir. Et bien encore qu'il soit difficile & presque impossible de s'y rendre parfaitement sçavant, du moins on ne peut s'exempter d'en apprendre le necessaire. Ces trois Sciences ne sont pas humaines, mais Divines. Et celuy qui les ignore ne pourra jamais s'élever au dessus des autres pour les bien gouverner; ne deviendra jamais à l'égard des autres hommes, un Dieu, un Ange, ou un demy-Dieu. Celuy là, dis-je, est bien éloigné de devenir un homme Divin, qui ne sçait pas compter, ny mesurer, ny connoistre les mouvemens du Soleil & de la Lune, & des autres Astres. Que si quelqu'un osoit dire que ces belles Sciences dont l'homme est capable ne luy sont pas necessaires, il auroit absolument perdu le sens. Car si l'on y fait reflexion, l'ignorance de ces choses n'est pas une ignorance d'hommes, mais de bestes, & de bestes les plus stupides.

οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ ὑηνῶν τινῶν εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων. Non hominum, sed suum pecorumque ignorantia.

C'est ainsi qu'on instruisoit autrefois les enfans dans la Grece, pour en faire non seulement des hommes, mais les Dieux des autres hommes, par les connoissances qui les élevoient au dessus du commun : Au lieu qu'aujourd'huy bien loin de leur apprendre les Sciences qu'ils appelloient divines, on ne leur apprend pas mesme les humaines, quoy qu'on ait conservé dans les Ecoles le mot d'*Humanitez*, sans en avoir retenu l'effet. D'où il ne faut pas s'étonner si la pluspart des jeunes gens, apres dix ou douze années d'étude dans les Colleges, en rapportent moins d'esprit qu'ils n'y en ont porté, parcequ'on ne leur fait rien apprendre qui leur ouvre l'esprit, qui leur forme le jugement, & qui soit la matiere d'aucun raisonnement. On charge leur memoire d'une infinité de Regles de Grammaire, qu'ils n'entendent pas quand ils les apprennent, qu'ils oublient quand ils commencent à les entendre, & qui ne leur sont d'aucun usage en toute leur vie. Mesme leur esprit devient tellement borné, que hors de la profession qu'ils auront embrassée, ils ne peuvent parler de rien, ils n'entendent point le langage des autres qui sont de profession contraire. Et quoyque bien souvent on en ait de la confusion, on ne laisse pas de continuer de vivre en cette ignorance de beau-

coup de choses, & de s'y confirmer par l'exemple des autres. Chacun s'estimant assez sçavant s'il peut devenir riche par son employ, & regardant la Science comme un obstacle à la bonne fortune, par l'occupation qu'elle donne, par le mépris qu'elle inspire de voyes honteuses ou basses de s'aggrandir, par le sentiment où elle fait entrer ceux qui l'aiment, de se contenter de leur état quelque mediocre qu'il soit, enfin par le retranchement & l'abandon des plaisirs de la vie, & par l'indifference pour les richesses que recherchent tant les gens du monde, qui mettent toute leur science à les aquerir & à les posseder, & tout leur soin à bien instruire leurs enfans dans ces maximes.

Voylà les deux états contraires où se rencontrent aujourd'huy ceux qui d'un côté preferent les biens de l'esprit à ceux de la fortune, & de l'autre ceux qui preferent les biens de la fortune à ceux de l'esprit. Ces derniers ont cet avantage sur les premiers, que la pluspart du monde entre dans leur sentiment, & juge leur condition meilleure. Ainsi les Sciences qui ne sont pas lucratives demeurent méprisées, & ceux qui les negligent se contentent d'un esprit mediocre & borné à leur employ. L'homme aussi n'est plus qu'une partie de ce qu'il doit estre, ou de ce qu'il estoit, lorsqu'on élevoit son esprit à des connoissances plus hautes & plus dignes de luy.

Cette digression sur l'opposition de la maniere ancienne d'instruire les enfans pour en faire des hommes, avec celle d'aujourd'huy, n'est pas tout à fait hors de nostre sujet; & peutestre qu'elle pourra servir à faire connoistre la necessité, ou du moins l'utilité de ces Sciences, qui mettent l'homme en état de faire un bon usage de sa raison, & sur toutes l'Arithmetique qui est comme la Clef de toutes les autres.

Nous ne nous étendrons pas davantage à en faire voir l'Excellence: nous esperons que tout ce Traité en sera une preuve bien puissante, & que ceux qui s'y appliqueront serieusement, seront convaincus que tout y contribuë à former le jugement, à donner une grande élevation à l'esprit, à épurer ses idées, & enfin à rendre l'homme tout à fait homme, c'est à dire capable, quand la passion ne l'aveugle pas, de raisonner toûjours juste, de bien concevoir, & d'exprimer nettement ses pensées. C'est où tendent toutes les Sciences, & c'est ce qu'opere particulierement celle-

des Nombres. Car autrefois, raiſonner & ſçavoir compter, paſſoit pour une meſme choſe, comme auſſi ne ſçavoir pas conter & eſtre tout à fait ſtupide ou beſte : ce que les Grecs & les Latins ont conſérvé dans leurs langues, où, raiſon & compte ont la meſme ſignification. Les Anciens meſme croyoient que ce qu'on appelle aujourd'huy les quatre Regles de l'Arithmetique, & dans leſquelles on fait maintenant conſiſter tout cet Art, eſtoient ſi naturellement connuës, qu'ils n'en ont jamais parlé dans leurs Livres : & l'on verra dans noſtre Analyſe, qu'ils poſſedoient ſi parfaitement la Science des Nombres, qu'ils pouvoient ſe paſſer de l'Algebre, qui n'a eſté inventé que quand l'homme, en negligeant cette Science, a commencé à décheoir de ſa raiſon. On verra encore dans la Reſolution des Queſtions qui ſont à la fin de ce Traité, qu'on n'a pas aſſez reſpecté la raiſon de l'homme, ou qu'on l'a crû bien affoiblie, lorſqu'on luy en a propoſé comme tres-difficiles, qui peuvent neanmoins ſe reſoudre par le ſeul raiſonnement. On verra enfin dans tout cet Ouvrage, qu'encore que nous diſions icy beaucoup de choſes à l'avantage de la Theorie des Nombres, ce n'eſt rien en comparaiſon de ce qu'on en peut dire.

Avant que de finir cette Preface, je dois avertir ceux qui n'entendent pas le Latin, qu'encore qu'il y ait icy des Livres entiers qui ne ſont point expliquez en François, comme auſſi il y en a qui ne ſont point en Latin, il n'y a rien neanmoins de neceſſaire qui ne ſoit en l'une & en l'autre Langue ; excepté ce qui regarde l'Arithmetique Harmonique, qui doit eſtre traitée ailleurs avec plus d'étenduë. Et je vas rendre raiſon en la Preface Latine qui ſuit, pourquoy j'ay plûtoſt mis cette Arithmetique, & meſme l'Algebre, en Vers Latins qu'en Proſe ; & prouver que la Poëſie eſt plus propre que la Proſe à rendre les Sciences faciles, à les faire entrer en l'eſprit avec plaiſir, & retenir à la memoire. Pour en imiter les manieres en François, j'ay choiſi un ſtyle ſerré, concis, net & clair, autant qu'il a eſté en mon pouvoir, & que la matiere l'a pû permettre.

ARS

ARS ET SCIENTIA NUMERANDI
LATINE ET GALLICE:
SIVE
ARITHMETICA
PRACTICA ET SPECULATIVA
LATINIS VERSIBUS AD MEMORIAM,
EXEMPLIS AD PERSPICUITATEM ET DEMONSTRATIONEM,
GALLICISQUE QUÆSTIONIBUS,
AD REGULARUM USUM EXPLICATA.

IN DUAS PARTES DIVISA.

DECEM LIBRIS, QUORUM SEPTEM PRIORES Arithmeticam vulgarem. Posteriores ALGEBRAM, seu occulti Numeri inveniendi Artem exhibent.

PRÆMITTITUR DISSERTATIO,

De præstantia Poëseos, præ soluta oratione, in insinuandis animo, tradendisque memoriæ Disciplinis.

PARISIIS,
Anno D. M. DC. LXXVII.
CUM REGIS PRIVILEGIO.

ẽ



PRÆFATIO.

ANTEQUAM *Arithmeticæ hujus Oeconomiam, & Instituti mei rationes explicem, multis iisque Amicis satisfaciendum est, quærentibus; Cur in re difficillima, ut est Arithmetica cum suis reconditioribus Regulis, ipsaque Algebra, quæ mentis humanæ Crux appellata est, Poësim usurpaverim, quæ pariter difficilis & intricata feré omnibus videtur? Obscuram, inquiunt, & intricatam faciunt Poësim, verborum transpositio; propriorum vocabulorum, quæ metri necessitas ferre recusat, in alia mutatio; nativa brevitas; Sublimis denique & à communi usu remotus ille, quem affectat, loquendi modus. Neque nos inficias imus, hæc omnia esse Poëseos peculiaria, Sublimem scilicet loquendi modum, brevitatem, propriorum vocabulorum sæpé in alia mutationem, verborumque transpositionem: Sed non ideò obscuram concedimus, non ideò minus idoneam tractandis disciplinis etiam difficilioribus; imò hæc ei viam sternere ad penetrandos animi recessus, ad committenda memoriæ scientiarum præcepta, neminem negatum iri confidimus, cui pauca, quæ secuntur, legere libuerit.*

DISSERTATIO

De Præstantia Poëseos, præ soluta Oratione, in insinuandis animo, tradendísque memoriæ Disciplinis.

UT meliùs Ingeniorum natura, ac Intelligendi & retinendi vis perspecta sit; hincque facilior fiat comparatio Poësim inter & solutam orationem; animadvertendum duximus, quòd sicut duplex est cognitionis genus, unum quod fit pedetentim & quasi palpando, viâ sensuum; alterum quod in instanti & nullâ successione peragitur, Intellectûs operâ: Ita duplex est loquendi ratio, una quâ sensim & quasi per verborum ambages res exprimimus, altera, quâ nitimur, quantum in nobis est, uno verbo aut certé quàm paucissimis, aperire animi nostri sensa; ita ut quemadmodum Intellectus noster unâ ideâ multa complectitur, sic uno verbo, si posset, suas cogitationes in lucem proferre vellet. Prima loquendi ratio peculiaris est Solutæ Orationi, quæ Sensuum, ut ita dicam, Interpres est; altera Poëseos opem implorat, quæ Intellectûs Oraculum & lingua est. Dedignatur ergo Poësis primi & infimi illius generis tum cogitationes tum locutiones; gaudetque animus non inanibus se pasci sermonibus, non inhiare post longas periodos, post oscitabundos discursus, post importunos digressus, sed brevibus commatis & incisis res sibi quasque repræsentari. Non quòd adimamus Poëtis illam Eloquentiam, quæ magnificis fulget descriptionibus, insurgit locis, figuris floret, translationibus nitet, fulgurat, fulminat, tonat. Imò hæc omnia præstat Poësis, & potentiùs & sublimiori modo quàm soluta oratio. Solum inter eas discrimen est, quod soluta languidé, dum copiosé; stricta verò acriter dum pressè suo instat operi. Ijs ergo Poëseos brevitas displicet, qui pinguem aut crassam amant Eloquentiam, vel quibus mens, sensuum adhuc indigens ministerio, ad altiora non potest assurgere.

Sed, inquiunt, obscurat Poësim verborum transpositio, ad quam dura carminis lex cogit sæpissimé. Vitiosam non defendi-

mus quæ turbat ſenſum, ſed eam tuemur & amamus quæ non Poëtis modò, verum etiam ipſis Oratoribus in deliciis eſt.

Trojæ qui primus ab oris, eloquentiùs quàm, qui primus ab oris Trojæ. Sic Cicero pro Archia poëta : *Si quid eſt in me ingenÿ*, meliùs quàm; Si quid ingenij eſt in me. Et in 2. de Natura Deorum, hæc tranſpoſitio nullo modo obſcurat aut turbat ſenſum, quamvis nulla forte major in Poëtis : *Sunt enim Philoſophi & fuerunt, qui omninò nullam habere cenſerent humanarum rerum procurationem Deos.* Magnam iſta ſimilitudinem habet cum ea quam in Virgilio reprehendit Quintilianus;

Saxa vocant Itali, mediis quæ in fluctibus, aras.

Minimé ergo Poëſim obſcurant, ſed potiùs floridam reddunt metatheſes illæ verborum permixtim collocatorum, ſi cum judicio & auris delectatione fiant.

Neque verò ſi qua deeſt alicujus vocis proprietas quam refugiat metrum, ideò Poëſi deeſt perſpicuitas, cùm abundè eam ſuppleat aut alterius vocis idem ſignificantis ſubſtitutio, aut periphraſis quæ eam magis explicat quàm ipſa ſi adeſſet. Adde quod Poëſim exornant & ditant Synonyma, & Epithetorum uſus, quorum tanta vis, ut aliquando phraſis integræ locum teneant. Talia ſunt quæ congerit Virgilius de Priamo ſene fruſtrà ruente in arma.

Arma diu ſenior deſueta, trementibus æuo
Circumdat nequicquam humeris, & inutile ferrum
Cingitur, ac denſos fertur moriturus in hoſtes.

Sublimis denique loquendi modus, ſpiritus eſt quo vegetatur & animatur ſtricta oratio, neruus quo ſuſtentatur, ſplendor quo clareſcit, fulgor quo rutilat, ardor quo inflammat, acies quâ penetrat. Et cum is loquendi modus maximam habeat affinitatem cum intelligendi ratione quâ pollet animus, hac viâ faciliùs ſeſe inſinuant Diſciplinarum præcepta, eaque avidiùs percipit mens, ob convenientiam cum ſuo agendi & intelligendi modo, retinetque firmiùs. Maximé autem juvant Memoriam ipſa Carminis per certos terminos limitatio, per lineas diſpoſitio, mutua per quantitatem verborum inter ſe colligatio & quaſi concatenatio, qua ſeſe conſecuntur & divelli à ſe nequeunt; metrorum initia propriâ ſibi lege præfixa, cæſurarum requies, ac clauſularum fines, ipſe denique verſuum obtutus qui quærentibus ſeſe ultrò

offerunt: quibus fit ut promptiùs memoriæ insideat, hæreatque tenacius Ode integra quàm Exordium aut alia pars unica Actionis Oratoriæ. *Faciliùs enim*, inquit Seneca, *singula insidunt circumscripta & Carminis modo inclusa.* Ep. 33.

Mitto antiquorum Exempla. Quis enim nescit, priscis temporibus id fuisse solemne, non Græcis modò & Latinis, verùm etiam barbaris nationibus, Ethica sua præcepta, heroum laudes & Deorum hymnos, physicas suas auscultationes versibus concludere, & plerumque ad cantum accommodare, ut ea faciliùs memoriæ committerent? Hinc Theogonia, id est Deorum Genesis ab Hesiodo, Ethnicorumque pené omnis Theologia fabulis involuta ab Homero, eorumque historiæ ab Ovidio versibus celebratæ: Hinc aurea Pythagoræ Carmina; hinc Theocriti & Virgilij Bucolica & Georgica, Lucretij Naturalia, nostrorum Druidarum à Julio Cæsare memorata carmina: hinc Arati phœnomena ab ipso Cicerone Latinis versibus donata, & Manilij Astronomica, cæteraque id genus. Sed, quid longiùs juvat excurrere, cùm habeamus præ manibus Græcorum Ænigmata de Numeris, metrorum legibus ligata & resoluta? ut taceam Sacras historias à Juvenco, Sedulio, Prudentio & aliis versu conscriptas; quò clarum sit, persuasum fuisse omni hominum nationi Poësim esse aptissimam, præ soluta oratione, ad quævis præcepta animis & memoriæ consignanda, quod nobis propositum erat demonstrare.

Excipimus ab hoc elogio, Satyricorum Poësim, quam aliquando obscuram fieri necesse est, tùm ut eò plures jacula ipsius feriant quò minus prævisa; tùm ut securiùs intorqueantur, quò magis occulta manus. Hoc etiam honore indigni censendi sunt, famelici illi Odarum, Elegiarum, Epigrammatum, similisque farraginis rapsodiarum sutores, vilia præpotentum & divitum mancipia, aut amore insanientium impuri ministri, quorum tota ars & ingenij ut putant, acumen, in eo laborat, ut mutatis tantùm verbis nihil dicant ampliùs quàm quod in titulo. At qui prodesse volunt & delectare Poëtæ, ij Poëtarum nobis nomine, loco & honore habendi sunt, non jam sensuum sed Ingeniorum interpretes, quod Poëseos scopus unicus dosque peculiaris est.

Quòd verò susceperim explicandam Versu potiùs quàm Prosâ Arithmeticam, ipsamque Algebram, quæ certé inter difficillimas Artes & Scientias primum locum tenent; neminem non approba-

turum confido, qui noverit nullam eſſe Artem aut Scientiam quæ pluribus ijſque intricatioribus ſcateat Regulis, quàm Arithmetica & Algebra; nec meliorem adfuiſſe viam illas omnes ab obſcuritate & tumultu vindicandi quàm Poëſim, quæ diſtinctè, breviter & jucundè illas ſecernit, hocque modo, animo & memoriæ faciliores reddit. Ne quis autem putet me, aut hac Diſſertatione aut meo qualicumque Carmine, alicujus inter Poëtas honoris aut nominis deſiderio teneri, illud Horatianum mihi aſſumo:

Primùm ego me illorum, dederim quibus eſſe Poetas,
Excerpam numero. Neque enim concludere verſum
Dixeris eſſe ſatis; neque ſi quis ſcribat, uti nos,
Sermoni propiora, putes hunc eſſe Poetam:
Ingenium cui ſit, cui mens divinior, atque os
Magna ſonaturum, des nominis hujus honorem.

Attamen ne nihil egiſſe videar hoc in negotio, ſpecimen aliquod brevitatis & facilitatis in didactica Poeſi majoris quàm in ſoluta Oratione, aut certè paris quando nulla utrobique occurrit difficultas, lubet hîc attexere per comparationem utriuſque. Exempla deſumo ex communibus Sententiis ſeu Axiomatibus & Definitionibus in Arithmetica noſtra ſparſis, ne ſi quid ex natura ſua obſcurum afferrem, illud in utraque æquè obſcurum remaneret.

Proſa.

Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent erunt æqualia.

Poeſis.

Ex æquis, æquis ſublatis, æqua ſuperſunt.

Proſa.

Si verò æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

Poeſis.

Sic æqualia erunt, ſi addas æqualibus æqua:

Proſa.

Quæ uni cuidam ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

aut

Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſi unum ſit æquale uni cuidam, & alterum eidem erit æquale.

Poesis.

Hæc sunt æqua sibi, quæ sunt æqualia cuidam.
aut
Quæ cuidam fuerint æqua, hæc sunt æqua sibique.

Definitiones Numerorum.

ex 7°. Euclidis.

1ª. *Prosa.*

Monas seu unitas est secundum quam entium quodque vnum dicitur.

Poesis.

Per Monadem quodcumque ens est & dicitur unum.

2ª. *Prosa.*

Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.

Poesis.

Est Numerus, monadum summam cellectio in unam.

3ª. *Prosa.*

Pars est, numerus numeri minor majoris, cùm minor metitur majorem.

4ª.

Partes autem, cùm non metitur.

Poesis.

Pars hæc est numeri, quæ exacté dividit illum.
Ut 2 Pars est 6, quia ter præcisé dividit 6.

Partes quæ superant repetitæ, deficiuntve.
Ut 2 ad 7, quem nec ter nec quater æquat.

5ª. *Prosa.*

Multiplex verò major minoris, cùm majorem metitur minor.

Poesis.

Multiplus est, qui continet in se sæpé minorem.
Ut 6 ad 2, quem ter continet.

Ac nisi veritus essem, importunam rem facere, probarem hîc quod modò dicturus sum ad Quartum Librum, nostram Euclidis per Carmina versionem adjunctis exemplis, clariorem esse quâvis aliâ per demonstrationes explicatione. Hujus rei experimen-

tum promptum eſt, inque Comentariis integræ paginæ habentur opponendæ unico Carmini & dimidiæ lineæ ad exemplum. Imò addere mihi liceat, Interpretum Demonſtrationes ſæpiùs obſcurare quod per ſe clarum eſt, aut quod ſolo exemplo abundé explicatur.

Plurima hujuſcemodi cernes in Commentariis Interpretum Euclidis, collata cum verſibus Quarti hujus Arithmeticæ Libri, ut inde probatum ſit nihil eſſe in ſcientiis tàm difficile quod non poſſit Poeſis claré & breviter, diſtinctè & jucundé eloqui ad ingenij & memoriæ juvamen: Illoſque parùm æquos eſſe rerum æſtimatores, qui Poeſim inter Artes inutiles ablegant, quaſi otioſorum hominum oblectamentum.

NUnc de Arithmeticæ hujus œconomia ac de Inſtituti noſtri ratione & ordine pauca dicemus. Movit nos ad hoc opus Majoris alterius Operis ſuſceptio de Proportionibus Harmonicis, ad quarum intelligentiam pars aliqua Arithmeticæ erat neceſſaria. Crevit opus præter deſiderium, ac tandem ad talem Arithmeticæ molem pervenit ut ſola Corpus integrum efficeret. Hanc in Decem Libros diviſimus, Latiniſque verſibus reddidimus tùm memoriæ indulgentes, tùm ne actum ab aliis iterùm ageremus, aut tædium & confuſionem pareret ingens tot Regularum copia. Gallicis Quæſtionibus maximam Regularum partem reſoluimus; aut ubi nulla quæſtio, verſuum ſenſum non verba expreſſimus; Libroſque tali digeſſimus ordine:

Primo Libro, de Prænotionibus ad Arithmeticam agimus, id eſt, de natura & diviſione partium Arithmeticæ, de varia Numerandi ratione, ac de Menſuris ad Numeros pertinentibus aut reducendis.

Secundo Libro, Arithmeticam Practicam Integrorum cum ſuis Regulis, poſt Numerationem, explicamus.

Tertio, Practicam Fractorum cum ſuis item Regulis, poſt Reductiones.

Quarto, Theoriam ſeu Speculativam Numerorum damus, qualem Libri antiquorum Arithmeticorum, ac præſertim Euclides V. VII. VIII. & IX. Elementorum propoſuit de Proportionibus & Numeris; hincque probatum iri credimus, Poeſim eſſe aptiſſimam ad explicandas res difficillimas, ita ut non aliâ Demonſtratione

tione opus sit quàm Exemplo, ad aperienda & solvenda Euclidea ænigmata: Clarioremque & perspicuam magis esse nostram per Carmina versionem Librorum hujus celeberrimi Geometræ, si jungas Exempla, quàm aliam quamvis per demonstrationes explicationem; præterquam quòd omnia meliori digessimus ordine.

Quinto, Doctrinam Proportionum, & satis fusé, ita ut nihil hîc desiderari possit nisi alienum ab hac Numerandi Arte.

Sexto, Arithmeticam Harmonicam, seu de Numerorum Proportionibus ad Sonos & Intervalla Musicæ pertinentibus; ubi miranda adeò exhibebitur inter Sonos & Numeros Concordia,

Vt dubites, an de Numeris sit Musica nata,
Illorumne Parens.

Septimo, Figuras Numerorum, quantùm sufficiat non modò ad Extrahendas quascumque Radices, sed ad Algebram quæ proximé sequitur.

His Appendicis vice addidimus Gallicé quidquid in aliis Arithmeticis, maximé in Boëtio, scitu dignum est.

Tribus Posterioribus Libris, Algebram. Quid sit autem Algebra, qualis & quanta res, ex ipso opere meliùs disces & convenientiùs quàm ex hac Præfatione, cui finem imponimus, ne desiderio legendi tuo longiores faciamus moras.



CARISSIMO FRATRI SVO
RENATO OUVRARD,
Veterem Musarum Chorum, Novæ ipsius Musæ Artem & Scientiam Numerorum Latiné & Gallicé explicanti, Coronas deferentem Offert ex animo
F. GUILLELMUS OUVRARD, Ordinis Minimorum.

ODE.



ULTO tempore nos Helladis inclytæ
Vatum docta manus finxerat incolas:
Sed pòst Fabula compulit,
Et mutare solum, novisque linguis
Concentus veteres docere Alumnos
Et Latias habitare terras.

Tantis jam meritis nos cumulaverat,
Ut solas superûm stemmate, Numine,
Dignatas & honoribus.
Sed plures quoque vidimus sorores,
Quæ nobis Genio altiore præstant,
Purior & quibus est origo.

At quænam nova lux fulget ab æthere?
Quæ demissa Polo progenies nova?
Quam complectitur, & sinu
Tellus Gallica suscipit, fovetque,
Aspectu insolito, modisque miris
Allicientem oculos, & aures?

Nos solùm docuit Numen Apollinis;
Aut Gestis seriem temporis addere;
Aut Heroïca carmina;
Aut Cœlestia, syderumque motus
Vel describere, vel referre cantu,
Et superûm celebrare laudes.

Veterum Musarum officia & nomina.
Clio.
Calliope.
Urania.

Aut versu Tragico tristia fundere;
Aut Mores hominum ludere Comicé;
Aut flatum calamis dare;
Aut pulsare fides; movere plectra;
Metiri Choreas, quibuslibetve
Organicis copulare voces.

Melpomene.
Thalia.
Euterpe.
Erato.
Therpsicore.
Polymnia.

Non omnes pariter possumus omnia;
Verùm pro genio nutus Apollinis
Confert munera singulis.
Ast hæc Musa recens, in orbe quidquid
Mortalem latet, aut patet videnti,
Vna docet, Numerisque pandit.

Nova Musa
Arithmelica. *id est*
Arithmetica-Harmonica.

Quidquid nobilis Ars, atque Scientia
Scriptis ediderant, una suis capit:
Sed felicior extitit;
Quod formare novas magis sit putanda,
Præceptis, Methodo Reique stylo,
Lege novâ Numeri ligatis.

Tres nobis Charites Fabula præstitit,
Vt gratis homines sponte laboribus
Mentes, collaque præbeant.
Ast ejus Comites venustiori
Collustrant specie, quâ alacriori
Mente petant opus, atque discant.

Novæ Musæ.
Charites.

Luci Prima dedit plura recondita,
Perdoctis Geniis hactenus abdita,
Vel fecit methodo Nova.
Quod mirere magis; peritiam Artis
Summé difficilis, Novâ arte claudit
Carminibus, facilemque præbet

Caïnophora. *id est* Nova ferens.

Si Rebus variis sit gravis Altera;
Ornant, non onerant, fitque venustior
Dum miro gerit ordine;
Dum tantâ explicat arte Quæstiones;
Exemplis probat; Et modum atque lucem
Principiis, Thesibusque ponit.

Glaphyrentaxia. *id est* Varietas cum recto ordine.

Præceptis brevibus tollit inutile,
Et claris tenebras Tertia disjicit:
Sic utroque parabilis;
Dum quicquid Veterum in Libris latebat,
Et quicquid propriâ dedit Minervâ,
Perspicuâ brevitate promit.

Brachysaphia. *id est* Perspicuitas cum brevitate.

Tandem vincimur ô Musa recens; tuis
Devinctas meritis cedere non piget.
Condignas igitur tuis
Nostras accipe Gratiis Coronas;
Dum vitæ Tuus in beatioris
Gaudeat Imperiis Apollo.



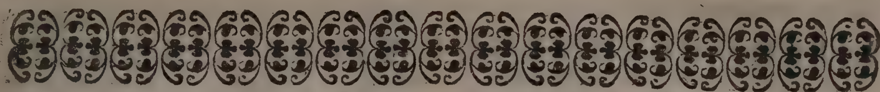


TABLE
DE LA PREMIERE PARTIE

De l'Art & de la Science des Nombres, ou de l'Arithmetique ordinaire, Pratique & Speculative, comprise en Sept Livres, en Vers Latins, expliquée par des Questions.

LIBER SECUNDUS.

Arithmetica Practica Integrorum.

LIVRE SECOND.

Arithmetique Pratique des Nombres Entiers.

LIBER TERTIUS.

Arithmetica Practica Fractorum.

LIVRE TROISIE'ME.

Arithmetique Pratique des Fractions ou Nombres Rompus.

LIBER QUARTUS.

Arithmetica Speculativa.

Continens quidquid scitu dignum tùm sparsim in Libris Arithmeticorum, cùm præsertim in Euclidis 5. 7. 8. & 9. Elementorum, de Proportionibus & Numeris habetur.

LIBER QUINTUS.

Arithmetica Relatorum seu Proportionum.

LIBER SEXTUS.

Arithmetica Harmonica,

Seu de Proportionibus ad Sonos & Intervalla Musicæ pertinentibus.

LIBER SEPTIMUS.

Arithmetica Figuratorum Numerorum.

EXPLICATION

Des quatre Livres precedens IV. V. VI. & VII. contenant la THEORIE des Nombres telle qu'elle est dans les 5, 7, 8, & 9 d'Euclide, & dans les deux Livres d'Arithmetique de Boëce & autres Auteurs anciens & nouveaux.

EXTRAIT

Des deux Livres d'Arithmetique de Boëce, contenant la Theorie des Nombres.

La Table des trois derniers Livres, contenant l'Algebre & l'Analyse des Nombres, avec les Questions, &c. est à la fin du Traitté.

ARTIS

ARTIS ET SCIENTIÆ NUMERANDI PARS PRIMA,

SEU

ARITHMETICA VULGARIS LATINE ET GALLICE SEPTEM LIBRIS COMPREHENSA.



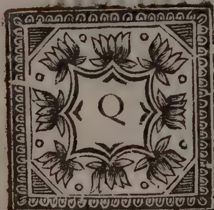
ARITHMETICA
PRACTICA ET SPECULATIVA
LATINIS VERSIBUS.

LIBER PRIMUS.

Prænotiones ad Arithmeticam.

CAPUT PRIMUM.

Quid sit Arithmetica & Numerus.



UOD Latijs Numerus, Græcis vocitatur Arithmus,
Ars Numerandi utrisque hac traxit origine nomen.
Utimur hîc Numeris, Numerandarum vice rerum,
Res etenim haud facilè nobis se sistere possent;
Sic Numeri, rerum sunt, quæ numerantur, Imago,
Res autem sic ad Numerorum fata vocantur.
Omne quod in rerum natura cernitur, unum est,
Indivisum in se, atque alio à quocumque revulsum.
Talia sunt seorsùm si spectes singula quæque,
Quæ nisi per mentem haud possunt coalescere in unum.
Ergo quod unum in se est, nullâ ratione secare
In partes poteris, nec in unam adducere summam
Multa, nisi famulam Numerandi Ars præbeat artem;



ARITHMETIQUE PRATIQUE ET SPECULATIVE.

EXPLIQUÉE PAR DES QUESTIONS.

LIVRE PREMIER.

Preludes d'Arithmetique.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est qu'Arithmetique & Nombre.



L'ARITHMETIQUE est la Science des Nombres ou l'Art de Conter. Quoy que ce mot soit Grec d'origine, les autres Nations l'ont adopté pour signifier cet Art.

Les Nombres servent à representer les choses, en sorte que par leur moyen les hommes peuvent conter des armées & des sommes immenses en leur cabinet.

Or toutes les choses du monde sont separées les unes des autres, & ne peuvent estre unies que par l'esprit :

Et comme chaque chose prise separément est une en elle-même, elle ne peut estre partagée en plusieurs parties, ny unie en une ou plusieurs sommes, que par le moyen de l'Arithmetique.

Et soit qu'on fasse cette union de plusieurs choses, ou cette separation d'une en plusieurs parties, ces choses doivent estre reduites en mesme genre:

Car on ne conte pas des grains de bled avec des mesures de vin, ny des hommes avec des sommes d'argent.

Ainsi l'Arithmetique ne s'applique qu'à unir ou separer les choses par le moyen des Nombres; ou bien elle s'occupe à en considerer les proprietez:

C'est par cét usage de l'Arithmetique qu'on arrive à la connoissance des proprietez des Nombres, qu'on appelle leur puissance.

CHAPITRE II.

Des differentes sortes de Nombres & d'Arithmetiques.

ON peut considerer les Nombres en beaucoup de manieres; & ces differentes manieres font plusieurs sortes d'Arithmetiques.

1. Il y a des Nombres qu'on appelle Entiers, parce qu'ils representent les choses en leur entier, comme 4 signifie quatre choses entieres & differentes.

Il y en a de Rompus, qu'on appelle autrement Fractions, qui representent les portions d'une chose divisée, & ces nombres se mettent l'un sur l'autre, comme $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$ c'est à dire un quart & deux tiers de quelque chose entiere partagée en ces parties.

Cette premiere difference de Nombres a fait deux sortes d'Arithmetique, l'une d'Entiers, l'autre de Rompus ou Fractions, dont nous parlerons dans les deux Livres suivans.

Pour éviter les Fractions, les Anciens employoient de grands Nombres, qui pouvoient recevoir toutes les Divisions necessaires.

2. Les Nombres sont ou Absolus, ou Relatifs, ou Figurez.

Les Nombres Absolus, sont ceux qui ne sont considerez qu'en eux-mesmes sans les rapporter à d'autres.

Les Relatifs sont ceux que l'on compare à d'autres selon l'égalité ou l'excez. Et nous en traiterons dans le V. Livre.

Les Figurez sont ceux qui estant disposez d'une certaine maniere, representent des Figures de Geometrie, dont nous parlerons dans le VII. Livre.

Enfin l'on considere les Nombres en eux-mesmes, c'est à dire leur proprieté, & cet égard fait l'Arithmetique Speculative que nous donnerons dans le IV. Livre, où nous expliquerons tout ce qu'Euclide en a dit.

Ou l'on les met en usage, & c'est ce qui fait l'Arithmetique Pratique, qui a ses Regles que nous donnerons dans le II. Livre.

Ces Regles sont la Numeration, l'Addition, la Soutraction, la Multiplication, & la Division qui comprend presque toutes les autres.

Quin, ad idem genus, ut numerentur, quæque reduces;
Nec vinum, nec homo, cum auro numerabitur aptè.
Ars Numerandi itaque, aut ſecat unum, aut plurima adunat;
Colligit aut ſpargit, Numerorum aut munia ſpectat.
Illius hoc eſt officium, Numerique poteſtas.

CAPUT II.

Quotuplex Arithmetica & Numerus.

A Numero Numerus variâ ratione recedit:
1. Integer ille, & Fractus hic. Integer annotat unum
Indiviſum in ſe, aut à ſeſe multa revulſa,
Quæ poſſunt ratione aliquâ coaleſcere in unum;
Denotat at Fractus rem unam per fruſta ſecatam.
Ex Numero Integro Fractoque Scientia duplex;
Hæc Fractorum, Integrorum illa Scientia dicta:
Fractorum tamen Antiquis incognita praxis,
Horum etenim vice, ſunt Numeris majoribus uſi.
2. Aut in ſe ſpecta Numerum, aut hunc conferad illum:
Iſta Relatorum, Poſitivorum illa vocatur:
Eſtque Figurati Numeri una ſcientia dicta.
3. Aut in ſe aut ad rem Numeri, unde ſcientia duplex;
Hæc Contemplatrix, eſt altera Practica dicta:
Scinditur hæc quinque in partes; Numeratio prima eſt,
Additio, Subtractio, Multiplicatio, quinta
Partitio, quæ ſola ferè complectitur omnes.

CAPUT III.

De variis Numerandi modis.

AUt numerant Numeros Numeris, ut sæpiùs hîc fit:
Aut numerant Numeris Res, ut fert publicus usus;
Aut Rebus Res, sic inopes commercia jungunt.
Seu Numeri Numeris, seu Res numerentur ijsdem,
Seu Rebus Res, est Numerandi Ars semper in usu;
Nam quasvis res sub Numerorum lege reduces.
Calculus & digiti haud digna istius Artis honore,
Ut pote quæ post se vestigia nulla relinquant.
Calculus at posset; calamo Numerata notante:
Sed præstat Numeris Artem concludere totam.

CAPUT IV.

De Materia seu subjecto Arithmeticæ.

QUod Geometris longum, latumque, profundum est;
Cosmographis quod spectandum, Harmonicisque sonorum,
Et quod Mechanicis certo cum pondere vires
Exercet, quodque Astronomis sub tempore currit;
Aurifaber quod sub lima, vendensque sub ulna
Distrahit, appendit trutinâ; quod dives in arca,
In doliis caupo, in thecis messorque recondit;
In caulis grex, in turba gens, miles in armis;
Agmina, mensuræ, Numeri ipsi, pondera, tempus,
Omneque quod partes habet, aut fingetur habere,
Lege sub hac cadit & Numerandi subjacet Arti:
Sicque quod in Sophia Logica, est & in omnibus hæc Ars.



CHAPITRE III.

Des differentes manieres de Conter.

L'On Conte quelquefois des Nombres par des Nombres, comme souvent on fait dans l'Arithmetique :

Ou des choses par les Nombres comme en l'usage commun :

Ou des choses par des choses, comme on fait dans les trocs ou échanges, dans les lieux où l'on n'a pas d'argent.

Mais de quelque maniere que cela se fasse, c'est toûjours par le moyen de l'Arithmetique, puisque toutes choses se peuvent reduire en Nombres.

La maniere de conter avec des jettons ou par les doigts, n'est pas proprement un Art ; parce qu'elle ne laisse rien aprés soy. Les jettons pourroient faire un Art, puisque la plume peut marquer leurs Contes : Mais il vaut mieux renfermer toute l'Arithmetique dans les seuls Nombres.

CHAPITRE IV.

De tout ce qui peut entrer en Conte.

TOutes les Dimensions que la Geometrie a reduit en long, en large, & en profondeur ou hauteur:

Tout ce qui se void dans le monde & ce qui s'entend en la Musique:

Les poids ou pesanteurs qui sont l'objet de la Mechanique :

Les mouvemens des Astres qui sont mesurez par le Temps.

Tout ce qui entre en commerce, soit en valeur d'or ou d'argent, soit en aulnage ou en balance ; soit en monnoye ou thresors, soit en muids de vin ou de grains :

Les troupeaux d'animaux, les assemblées d'hommes, les armées ;

Les Nombres méme, enfin, tout ce qui a des parties, ou qu'on peut supposer en avoir, peut entrer en matiere de Conte & estre l'objet de l'Arithmetique.

Elle est ainsi, à l'égard de toutes choses, ce que la Logique est à toutes les parties de la Philosophie.



CHAPITRE V.

Des differentes mesures pour toutes sortes d'Arts & de Sciences.

DU TEMPS.

LE Temps, qui mesure le cours du Soleil & de la Lune, se divise en années, en mois, en jours, en heures : & ces années composent des Olympiades, des Lustres, & des Siecles.

L'année du Soleil est de douze mois, qui font 365 jours, & presque six heures : ou 52 semaines & un jour.

De quatre en quatre ans on ajoûte un jour, composé de ces 6 heures, que chaque année a outre les 365 jours, & ce jour se place au mois de Fevrier, qui alors a 29 jours.

Et parce que ces 6 heures ne sont pas entieres, tous les cent ans on retranche ce jour en ne l'ajoûtant pas ; & de quatre en quatre cens ans on l'ajoûte.

L'année de la Lune a 11 jours moins que celle du Soleil, & n'a ainsi que 354 jours.

Chaque jour a 24 heures.

Chaque heure 60. minutes, qu'on marque ainsi 60.

Chaque minute soixante secondes, qu'on marque avec deux traits.

Et ainsi à l'infiny chaque moment est composé de 60. autres.

Les Olympiades renferment quatres années.

Les Lustres, cinq ; les siecles, cent.

Dans la Bible le mot de siecle est employé pour la durée du monde : jusqu'à la consommation du siecle, c'est à dire, jusqu'à la fin du monde.

Et quand il est repeté, le siecle du siecle, il se prend pour l'Eternité, & quelquefois mesme sans estre repeté.

Si l'on conte des mois sans les nommer, on leur donne chacun 30. jours.

Ainsi les Medecins content pour les neuf mois de l'enfantement deux cens soixante & dix jours, c'est à dire, neuf fois trente ; & pour les sept mois, deux cens dix jours, c'est à dire, sept fois trente.

Quand on les nomme, on leur donne à chacun le nombre de leurs jours ; sçavoir à Avril, Juin, Septembre, & Novembre 30. aux autres 31 & à Fevrier 28 ou 29.

CAPUT

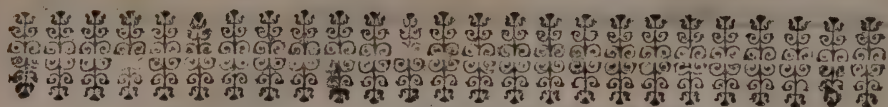
CAPUT V.

De Variis mensuris.

UT quam quisque elegit, in hac se exerceat arte,
Omnibus hîc varias Numerandi tradimus artes.

TEMPORIS.

ESt Tempus Lunæ ac Solis duratio motûs:
Horas ergo, Dies, Menses numerabis & Annos,
Lustra & Olympiadas, Æras & Sæcula quævis.
Annus habet menses duodenos; sive trecentos
Sexaginta & quinque dies, sex circiter horas.
Hebdomadasve duas & quinquaginta, diem unum.
Quarto quôque dies anno ob sex advenit horas:
Abjicit huncque diem quivis centesimus annus;
Hunc iterum recipitque quater centesimus annus.
Lunæ annus minor est unoque decemque diebus.
Unusquisque dies, viginti quatuor horis,
Et sexaginta componitur hora minutis,
Ac totidem constant hæc prima minuta secundis;
Per sexaginta sic divide quodque minutum.
Lustrum quinque annis; quatuor, sed Olympica; centum,
Constat sæclum: hoc pro mundi ævo Biblia ponunt;
Et repetitum, in perpetuum protenditur ævum.
Quando unum aut plures numeras sine nomine menses,
Huic illisque dato numerum triginta dierum;
Sic Medici, ad partum, menses implere novenos
Ducentas dixêre dies & septuaginta;
Mensibus & septem ducentas esse decemque,
Dum per triginta ducunt septemque novemque:
At certum aut plures numerans cum nomine menses,
Cuique suos concede dies: triginta dabuntur
Aprili & Junio, Septembrique atque Novembri;
Sed reliquis triginta unus: Februarius, octo
Supra viginti, quandoque novem, unus habebit.



LIBER SECUNDUS.

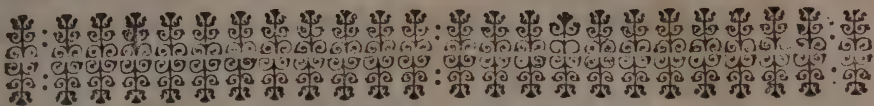
Arithmetica Practica Integrorum.

CAPUT PRIMUM.

De Numerorum signis seu Characteribus tàm antiquis quàm recentioribus.



QUO meliore luto gens & melioribus astris
Est orta, ad Numerum signis melioribus usa est.
Simplicior quondam digitis, brevibusque lapillis,
Lineolisve in charta aut ligno, aliove notatis;
Utitur & nunc, cui calami est incognitus usus.
Proximior Numerandi Arti modus, exiit inde
Calculus, & multis nunc promptior esse putatur,
Suppeditante illi calamo, quod defore credunt.
Romani, Græci, & quævis gens dedita Musis,
Pro Numero, signis sunt Grammaticalibus usi,
Et fas est illis etiam nunc cuilibet uti:
Nobis exhibuisse sat est ad marginis oram;
Commodiora etenim jam pridem inventa fuêre,
Queis nobis placet ut pote commodioribus uti:
Hæcque decem, numeri digitorum imitatio fecit.
Ex his innumeranda tibi Numeratio surget,
Sola etenim mutat pretium mutatio sedis;
Quæque, loco primo, fuerant contenta valore,
Perque decem hunc, & centum, & mille, & millia dena,
Sedibus ad lævam retrocedentibus, augent.
Prima figura nihil de se valet: at reliquarum
Æmula, & illarum sedem occupat, & pretium auget,
Illas dum cogit sibi retrocedere sedem.



LIVRE SECOND.

Arithmetique Pratique des Nombres Entiers.

CHAPITRE PREMIER.

De la maniere de chifrer ou de representer les Nombres, tant ancienne que moderne.

OMME par toute la terre on ne se pouvoit passer de conter, chaque Nation suivant la portée de son genie inventoit les moyens d'exprimer les Nombres.

Anciennement, comme font encore aujourd'huy ceux qui ne sçavent pas écrire, on contoit par ses doigts, ou avec de petites pierres, ou avec de lignes tracées sur du bois, du papier ou autre matiere, ce qu'on appelle conter à la taille, & en quelques lieux à la coche.

Le moyen le plus approchant de l'Arithmetique a esté le jetton, & quelques-uns méme le preferent maintenant comme plus prompt, en marquant avec la plume les sommes jettées ou calculées.

Les Romains, les Grecs, & autres peuples qui cultivoient les Sciences, employoient pour chifres les lettres de leur Alphabet, & maintenant encore s'en sert qui veut. Nous nous contenterons de les representer icy.

Et nous nous servirons des Caracteres communs, dont on attribuë l'Invention aux Chaldéens ou aux Arabes, comme estant moins embarassans, & pouvant eu peu d'espace representer toutes sortes de Nombres.

A l'imitation des dix doigts de la main, il n'y a que dix figures; dont les neuf premieres sont simples, & la dixiéme est composée de la premiere, & d'un petit cercle eppellé zero ou o en chifre.

Avec ces dix figures on peut aller à l'infiny, en les plaçant diversement.

Chaque caractere seul ou dans le premier rang ne vaut que sa simple valeur. Dans la seconde place, en commençant à droite & tirant vers la gauche, il vaut des dixaines : dans la troisiéme, des centaines : dans la quatriéme, il vaut mille; dans la cinquiéme, dix mille; dans la sixiéme, cent mille; dans la septiéme, des millions; dans la huitiéme, des dixaines de millions; dans la neuviéme, des centaines de millions; dans la dixiéme, des bimillions, & ainsi en augmentant toûjours à mesure qu'ils s'éloignent de la premiere place.

Le gros de trois deniers 8. ſ. 9. d. ou 105. d.
Le denier de poids de 24. grains, 2. ſ. 11. d. ou 35. d.
Le grain 1. d. & pite.
Ce prix n'eſt pas fixe, il dépend de la volonté du Prince, & il faut ſuivre l'uſage.

Du partage du Douzain, ou de quelque ſomme que ce ſoit, qu'on ſuppoſe avoir douze parties égales.

LE mot Latin A S ſignifie une maſſe ou ſomme qui peut eſtre diviſée en douze parties égales ou onces.

12. eſt commode pour les diviſions, il a ſa moitié qui eſt 6, ſon tiers qui eſt 4, ſon quart qui eſt 3, ſon ſixiéme qui eſt 2, & ſon douziéme qui eſt 1.

Les deux tiers ſont 8; les trois quarts 9.
On met ainſi en fractions toutes ſes parties.

$\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ |

$\frac{7}{12}$ | $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$ | $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ | $\frac{10}{12}$ ou $\frac{5}{6}$ | $\frac{11}{12}$ | $\frac{12}{12}$ ou l'entier.

CHAPITRE VI.

Ordre des Livres de ce Traité.

LES deux Livres ſuivans, ſecond & troiſiéme donnent la Pratique des Nombres Entiers & Rompus.

Le quatriéme en contient la Theorie, telle qu'elle eſt dans les 5, 7, 8 & 9. d'Euclide, ou autres celebres Arithmeticiens.

Le cinquiéme traitte des Proportions.

Le ſixiéme des Nombres Harmoniques.

Le ſeptiéme des Figures des Nombres, ou de l'Extraction de toutes ſortes de Racines.

Et dans les derniers l'Algebre y eſt expliquée; c'eſt à dire l'Art de reſoudre toutes les queſtions des Nombres que l'Arithmetique ordinaire ne peut reſoudre.

AVIS.

NE liſez rien ſans l'appliquer aux Exemples; & aprés avoir examiné les Regles par les Exemples, reliſez les Regles.

Quinque ſupra centum partes duodenas,
Ac denariolus triginta quinque; valetque
Granum, unam & mediam; valor arbitrarius iſte,
Regis ab Edicto pendens; uſuſque ſequendus.

Partes Aſsis.

CUm pro re tota ſeu Maſsâ ſumimus Aſſem,
Aſſem dividimus tunc in partes duodenas,
Uncia pars duodena eſt, bis ſex unciæ in aſſe;
In Sextante, duæ; tres in Quadrante; Trienſque
Quatuor, & Quincunx quinque, & ſex, Semis habebit,
Et Septunx ſeptem, Biſque octo; novemque Dodranti,
Dextantique decem dabis; unam pluſque, Deunci.

CAPUT VI.

Ordo Librorum hujus Tractatus.

TAlis de Numeris noſtrorum erit Ordo Librorum:
Praxim Integrorum & Fractorum utrique ſequentes,
Horum Contemplatricem Quartuſque miniſtrat,
Euclides qualem quatuor Geometra Libris:
Quanta ſit in Numeris, Quintus, Proportio, monſtrat:
Miranda Harmonicæ Sextus myſteria pandit;
Septimus in Numeris varias docet eſſe Figuras.
Tandem aperit ſe poſterioribus Algebra libris;
Occulti numeri quæ dicta eſt Algebra Clavis.

CONSILIVM.

SEmper ad Exemplum cures adducere Normam:
Collato cum Norma Exemplo, perlege Normam.

Spatij.

SEx in Lineolâ ſunt Puncta; in pollice, bis ſex
Lineolæ; conſtat duodenis pollicibus pes.
Quatuor ex granis digitus componitur unus:
Eſt quater in palmo digitus, quater in pede palmus;
Sex palmis Cubitus, pedibus ſex Thoſia conſtat.
Furca pedes decem habet, centum ſed Jugera Furcas.
Quinque pedes paſſum faciunt; paſſus quoque centum
Et viginti quinque dabunt ſtadium; Stadia octo
Component paſſus mille: at Germanica Leuca
Millibus ex quatuor ſtabit; Leucas Gradus unus
Quindecim habet, quatuor ſi conſtet millibus una.
Sunt Gallis Leucæ majores, ſuntque minores:
Millia Leuca minor duo habet, tria millia major.
Circulus eſt Gradibus ſexaginta atque trecentis.

Libræ in genere.

LIbra modis tribus accipitur: Valor una Monetæ,
Quæ viginti aſſes ſolidos valet; Altera pondo
Et quinquaginta librarum eſt ſexque monetæ;
Uncia, ſedecima illius pars: Tertia Libra
Quæ Medicorum eſt; & bis ſex ſunt unciæ in illa.

Valor Monetæ.

PRima valet viginti aſſes; ter libraque, ſcutum;
As denariolos bis ſex; hoc pendet ab uſu.

Pondo ſeu Libræ Argenteæ.

AUrifabris Pondo valet hoc argentea libra:
Sedecima eſt libræ pars uncia; & uncia drachmas
Octo valet; drachmamque æquant denarioli tres;
Granis viginti quatuor denariolus par.

Reductio Libræ Pondo ad valorem Monetæ.

POndo libra eſt, quinquaginta ſexque monetæ,
Sic libris pendet nunc viginti octo Selibra:
Uncia ſeptuaginta aſſes; & drachma valebit

De l'Estenduë.

LA ligne a 6 Points : le Pouce a 12 lignes : & le Pied a 12 pouces.
Le doigt est composé de 4 grains : la paume, de quatre doigts ; le pied, de quatre paumes ; la coudée, de six paumes ; la thoise, de 6 pieds ; la perche, de dix pieds, & l'arpent, de cent perches.

Le Pas a cinq pieds : la Stade a 125 pas.

Huit Stades font mille pas. Ainsi le Bourg d'Emmaüs qui estoit éloigné de Jerusalem de soixante Stades, en estoit distant de sept mille cinq cens pas.

La lieuë d'Allemagne a 4000. pas.

La grande lieuë de France en a 3000. & la petite 2000.

Un Degré a quinze lieuës d'Allemagne.

Le Cercle a 360. degrez.

De la Livre en general.

IL y a trois sortes de Livres, l'une de Monnoye qui vaut vingt sols.
L'autre de Poids ou de Marc, dont la valeur est variable, qui a valu 6 livres de monnoye, & qui a 16 onces.

La troisiéme est la Livre des Medecins, qui pese 12 onces.

De la Livre de Monnoye.

LA Livre de Monnoye vaut 20. sols ; Un écu vaut trois livres ; & le sol vaut 12. deniers. Ce qui dépend de l'usage ou de la volonté du Prince.

De la Livre de Poids, & du Marc.

LA Livre de Poids, ou de Marc d'argent pese 16. onces, ou deux Marcs.
Le Marc ou demie livre 8 onces.
L'once 8 gros : le gros 3 deniers ou 72 grains.
Le denier 24. grains.

Reduction de la livre d'argent à la livre de Monnoye.

LA Livre de 16. onces a valu 56 livres d'argent.
Le Marc ou demie livre de 8 onces, 28 livres.
L'once de 8 gros. 3. l. 10. s. ou 70. s.

Le zero, ou o en chifre ne vaut rien de ſoy, mais il prend la place comme les autres, des dixaines, centaines, mille, &c.

Chifres ou Nombres communs.

Simples nombres qui n'ont qu'une Figure.

rien,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	ſix,	ſept,	huit,	neuf,
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9

Compoſez qui en ont deux, ou trois, &c.

dix,	unze,	douze,	treize,	&c.
10,	11,	12,	13,	

Dixaines.

dix,	vingt,	trente,	quarante,	cinquante,	ſoixante,	ſeptante,	quatre-vingt,	nonante.
10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90.

cent,	mille,	dix mille.	cent mille.	million.	
100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	&c.

CHAPITRE II.

De la Numeration Arithmetique.

LA Numeration eſt tout à fait differente de l'Addition, quoy qu'en veüille dire Ramus; parce que dans l'Addition on adjoûte enſemble deux ou pluſieurs nombres, & la Numeration donne la valeur & la place à chaque nombre, ſans rien operer; c'eſt pourquoy elle n'eſt pas proprement une regle de pratique, mais ſeulement une adreſſe pour connoiſtre ce que les nombres valent en tel ou tel lieu.

On commence à chercher leur valeur par la droite, mais on l'exprime en commençant par la gauche.

Pour la bien trouver on partage les nombres de trois en trois, en commençant à droite.

Le premier des trois du premier point, s'appelle nombre; le ſecond, dixaine; le troiſiéme, centaine.

Le premier des trois du ſecond point ou de la ſeconde diviſion s'appelle, mille; le ſecond, dixaine de mille; le troiſiéme, centaine de mille.

Le premier des trois du troiſiéme point s'appelle, million; le ſecond, dixaine de million; le troiſiéme, centaine de million.

Le premier des trois du quatriéme point s'appelle, bimilion; le ſecond, dixaine de bimilion; le troiſiéme, centaine de bimillion. Et ainſi tant qu'il y en aura.

Antiqua

Antiqua signa Numerorum.

Decem manuum digiti : Lapilli : Lineolæ ; Calculi.

	mille	quingenti	centum	quinquaginta	decem	quinque	unum.
Romanorum.	M	D	C	L	X	V	I.

Græcorum. Valor digitorum.	unum. α.	duo. β.	tria. γ.	quatuor. δ.	quinque. ε.	sex. ϛ.	septem. ζ.	octo. η.	novem. θ.
Valor denariorum.	Iα.	viginti. Iκ.	triginta. λ.	quadrag. μ.	quinquag. ν.	sexag. ξ.	septuag. ο.	octog. π.	nonaginta. ς.
Valor centenariorum.	ducenti. ρ.	trecenti. ς.	quadring. τ.	quingent. υ.	sexcent. φ.	septing. χ.	octing. ψ.	nongenti. ω.	ϡ.

Valor millenariorum. duo millia, &c.
vel α' vel α̦ | vel β' vel β.

	decem millia.	mille.	centum.	decem.	quinque.	unitas.
Græcorum majusculæ Litteræ.	M.	X.	H.	Λ.	Π.	I.

Valor	zero seucifra, sola nihil.	unum,	duo,	tria,	quatuor,	quinque,	sex,	septem,	octo,	novem,
Recentiorum.	0.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

decem,	undecim,	duodecim,	tredecim, &c.
10,	11,	12,	13.

decem,	viginti,	triginta,	quadrag,	quinq,	sexag,	septuag,	octog,	nonaginta.
10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90.

centum,	mille,	decem millia,	centum millia,	millia millium,	&c.
100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	&c.

CAPUT II.

De Numeratione Arithmetica.

QUamvis reclamet Ramus, Numeratio differt
A numeri Additione, quòd hæc plures simul unit;
At Numeris sedem & pretium Numeratio donans,
Quot valeant, docet, hac aut illâ sede locati.
Cùm plures numeri summam junguntur in unam,
Sumitur à dextrâ lex principiumque valoris,
Et tamen à læva summæ prolatio prodit.
Sic ergo junctis dandus valor iste figuris:
A dextris quæ primâ in sede, suum illa valorem
Simplicem habet; totiesque decem quæ in sede secunda,

Et toties centum in ternâ, toties quoque mille
In quarta, quoties præ se fert ipsa figura:
Quòque magis lævam petit unusquisque character,
Multiplicat proprium tantò plus quisque valorem;
Perque decem & centum & per mille & millia dena
Accrescit, dum quisque à primâ sede recedit.
Unicus ergo est usque decem, omni in sede, character,
Ad centum usque duo, tres usque ad mille; quaterni
Millia; quinque, decem, sex, centum millia signant.
Ad quæcumque decem, vel centum, aut mille, figura
Additur una, & sic semper Numeratio crescit.
Zero locum tenet, & nihil addit nomine dignum.

De Numeratione Harmonica.

PErtinet usque decem numeri progressio dicta:
Harmonici ast Numerandi aliam servant rationem;
Ad septem tantùm, ob septem discrimina vocum,
Progrediuntur, & iis est octavus sonus, idem
Ac primus, nonus repetitio & ipse secundi,
Tertij & est decimus, quarti sic undecimusque,
Ac usque ad quartumdecimum repetitio prima est,
Alteraque à quintodecimo repetitio prodit,
Et sic perpetuus per septem circulus exit,
Hebdomades ut sunt rota septem alterna dierum.
Harmonicorum alias praxes tradet tibi Sextus,
Musica namque Relatorum reputanda facultas.

Harmonica Progressio.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
8,	9,	10,	11,	12,	13,	14
15,	16,	17,	18,	19,	20,	21
22,	23,	24,	25,	26,	27,	28
29,	30,	31	&c.			

Puis pour les énoncer on commence à gauche, comme en cét Exemple ; 272, 349, 528, 461, deux cens soixante douze bimillions, trois cens quarante-neuf millions, cinq cens vingt-huit mille, quatre cens soixante-un.

Dans la Numeration le zero n'a point de nom, c'est à dire, qu'on passe son rang sans le nommer.

De la Numeration Harmonique.

Les Musiciens ont une autre maniere de conter. Au lieu que dans l'Arithmetique les Nombres vont jusqu'à dix, & qu'aprés dix, & de dix en dix, ce n'est que la repetition des premiers, comme 11, 12, 13, &c. c'est à dire, dix & un, dix & deux, dix & trois, &c. & de mesme 21, 22, 23, &c. 31, 32, 33, &c. les premiers se repetent toûjours ;

Dans la Musique les Nombres ou Sons ne vont que jusqu'à sept, & puis le huitiéme, qui s'appelle en Musique l'Octave ou Diapason, est la repetition du premier ; le neuviéme est la repetition du second, le dixiéme du troisiéme, & ainsi jusqu'à quatorze ;

Puis la seconde repetition commence à 15 qui s'appelle la double Octave ou Disdiapason ; & puis à 22 commence la troisiéme repetition ; puis à 29 la quatriéme, & ainsi toûjours de sept en sept, comme les jours de la semaine, qui font un cercle perpetuel.

Voyez la petite Table vis à vis, qui peut aussi vous servir de Calendrier pour tous les mois de l'année.

Car quand vous sçaurez quel jour de la semaine aura commencé chaque mois, vous sçaurez aussi que les mesmes jours des autres semaines seront le 8, le 15, le 22 & le 29. Et tel qu'aura aussi esté le 2, le 3[e] ou 4[e], &c. tels aussi seront ceux qui sont au dessous dans la mesme file.

Nous donnerons dans le sixiéme Livre les autres Operations de la Musique, en parlant des Proportions qui regardent principalement cette Science.

CHAPITRE III.

Regle d'Addition.

1. Placez chaque somme particuliere l'une sur l'autre, en sorte que les premiers nombres à droite repondent aux premiers, les seconds aux seconds, &c. & tirez une ligne au dessous.

2. Adjoûtez ensemble les nombres de chaque file ou rang de bas en haut.

3. Si chaque produit ne passe pas neuf, marquez-le au dessous de la file adjoûtée.

4. S'il passe neuf marquez la premiere figure des deux, & reservez l'autre pour le rang prochain.

Questions d'Addition.

1. En quelle année de la Creation du monde est né Jesus-Christ ?

Depuis la Creation du monde jusqu'au deluge	1656 ans
Depuis le deluge jusqu'à la vocation d'Abraham	426
Et de là, à la sortie d'Egypte	430
Et de là, à la dedicace du Temple de Salomon	480
Et de là, à la fin de la Captivité de Babylone	476
Et de là, à la Naissance de Jesus-Christ	532
Réponse. Somme des années	4000

Depuis le deluge jusqu'à la Creation du monde	1656
Depuis la vocation d'Abraham jusqu'à la Creation du monde	2082
Depuis la sortie d'Egypte jusqu'à la Creat.	2512
Depuis le Temple jusqu'à la Creation du monde	2992
Depuis la Captivité jusqu'à la Creation du monde	3468
Depuis la Naissance de Jesus-Christ jusqu'à la Creation du monde	4000

2 *Combien y a-t-il d'Etoilles fixes, qui paroissent ?*

De la premiere grandeur	15
De la seconde	45
De la troisiéme	208
De la quatriéme	474
De la cinquiéme	225
De la sixiéme	41
Plus 5 nebuleuses, 9 obscures	14
Réponse	1022

3 *Quelle est l'Elevation du Firmament & des Planetes au dessus de la Terre ?*

Le Firmament est élevé au dessus de Saturne de	6000000 lieuës
Saturne au dessus de Jupiter	6000000
Jupiter au dessus de Mars	800000
Mars au dessus du Soleil	100000
Le Soleil au dessus de Mercure	933000
Mercure au dessus de Venus	103000
Venus au dessus de la Lune	24000
La Lune au dessus de la Terre	40000
Réponse, La Terre est au dessous du Firmament vingt millions de lieuës	20000000

Ainsi le Firmament est élevé au dessus de la Terre. 20000000

Saturne	14000000
Jupiter	8000000
Mars	1200000
Le Soleil	1100000
Mercure	167000
Venus	64000
La Lune de	40000
en son apogée	
& de	30000
en son perigée	

Addition de differentes especes.

Quand on adjoûte differentes especes comme des deniers, des sols, des livres & des escus, on commence par les moindres, & on les prend de suite en allant vers la gauche ; & l'on reserve pour le rang suivant d'une autre espece, autant d'unitez qu'il y a de sommes d'une espece pour composer l'espece suivante. Par exemple la somme des deniers est douze pour faire des sols, la somme des sols pour faire des livres est 20 ; la somme des livres pour faire des escus est trois. Ce qui se rencontre en chaque espece de plus ou de moins que la somme, se marque en la mesme espece.

Questions de differentes especes.

Combien peze une Croix d'argent qui contient
En sa hauteur 4 marcs, 3 onces, 4 gros, 1 d. 13 grains.
En son travers 3 marcs, 5 onces, 6 gros, 2 d. 7 grains.
En son pied 8 marcs, 6 onces, 3 gros, 1 d. 9 grains.

Réponse (16 marcs ou 8 livres.) 7 onces, 6 gros, 2 d. 5 grains.

La Croix vaut en argent monnoyé sans la façon à 28 liv. le marc 475 liv. 8 s. 11 d.

Si je suis né le 16 de Juin 1624, à 10 heures du matin, quand auray je 76 ans, 3 mois 6 jours, & deux heures.

Operation.

1624, mois de Juin, 16 jours, 10 heures
76, 3 mois, 6 jours, 2 heures.
Rép. 1700. le 22 Septembre à 12 heures, ou midy.

CAPUT III.

De Additione.

ADDITIO plures Numeros Summam unit in unam.
A dextra incipiens, primos dein quoſque locato:
Primos cum primis, dein ordine jungito quoſque,
Productum ſubponatur poſt lineolam infrà,
Productoque ſuo reſpondeat additus ordo.
Summa novem non excedens ſcribatur; at illa
Quæ ſuperat, primum ſcribit, ſervatque ſecundum,
Quem recipit propriiſque adjungit proximus ordo:
Qui ſupereſt poſt omnia, cum poſt omnia ſcribe.

Vide Exemplum I.

Diverſos ſpecie numeros ſic addito in unum;
Incipe per minimos, versùs tendendo ſiniſtram,
Collige quoſque ſuam in ſummam, & pro quaque reſerva
Tantùm unum, quod ponito in ordine pone ſequenti.
Bis ſex, ſumma aſſis; viginti, ſummaque libræ;
Tres libræ, ſcuti ſumma: horum eſt arbiter uſus;
Uſum in ponderibus, menſurâ, aliiſque ſequare.

Vide Exemplum II.

Exemplum I.

Addendi.	7580942
	3590633
	170921
	90413
Summa.	11432909

Exemplum II.

Addendi.	16 ſcu.	1 l.	13 ſ.	9 d.
	13 ſcu.	1 l.	6 ſ.	3 d.
Summa.	30 ſcu.	0 l.	0 ſ.	0 d.

CAPUT IV.

De Subtractione.

HÆc unam aut plures ſummas disjungit ab una;
Vel multos numeros de multis ſubtrahit unà:
Sic tres admittit præſens hæc Regula Caſus.

1. *Caſus.*

UNam ſi tantùm ſummam disjungis ab una;
Major ſumma ſuprà ponenda, minorque deorsùm;
Illa Dati nomen, nomenque habet iſta Recepti.
Diſpoſitis ſummis, ut in Additione, duabus,
A prima primam, dein ordine quamque figuram
Subtrahe, ſubſcribens Reliquum poſt lineolam infrà.
Quamvis ſumma Dati major; quandoque Recepti
Eſt aliquis numerus majorve, æquuſve, minorve:
Cum minor, à majore trahe; æquus, cifra notetur;
Major, junge Dato decem ut hinc ſubtractio fiat,
Proque decem capit unum proximus ordo Recepti,
Quod ſibi jungit ut inde ſequens ſubtractio fiat.

VIDE EXEMPLUM I.

2. *Caſus.*

CUm plures numeros ſummâ disjungis ab una,
Lineola ijs interpoſita hos ſecernat ab illo.
A dextra incipiens, primos dein quoſque locato:
In ſummam numeros cujuſcumque ordinis addens,
Primos à primo, dein ordine ſubtrahe quoſque;
Et Reliquum ſubſcribatur poſt lineolam infrà.
Quando æqui hinc illinc numeri, tunc cifra notetur:
Si Subducendorum aliquis ſuperaverit ordo,
In minimo tunc eſſe duas ſuppone figuras,
Quarum prima intacta manebit, & altera creſcet
Per toties decem, ut hinc fieri ſubtractio poſſit.
Ex ſic majore effecto, ſubtractio fiat;

CHAPITRE IV.

Reglé de Soutraction.

1. PLacez comme à l'Addition, la dette au dessus & la paye au dessous.
2. S'il y a plusieurs sommes à soutraire, assemblez chaque file de la paye, & retirez de la dette le produit.
3 Quand un nombre de la paye est plus grand que celuy de la dette, feignez qu'il y a une autre figure à la dette qui contienne autant de fois dix, qu'il sera necessaire pour faire la Soutraction.
4. Puis donnez à la file suivante de la paye autant d'unitez que vous aurez enprunté de dixaines.

Questions de Soutraction.

D'Une Armée composée de 570 Compagnies de 100 hommes chacune, qui font 57000, on fait un détachement de 25 hommes par Compagnie, qui font 14250, combien en reste-t-il dans le corps-d'armée?

Réponse de 57000
ôtez 14250
il reste 42750.

Supposant que le Clergé de France ait ordinairement de revenu annuel, decimes ordinaires payées trente-trois millions, sçavoir huit millions en dixmes, quinze millions en heritages ou fonds de terre, & dix millions en argent; En l'année 1675, les dixmes ont diminué de la moitié; les heritages, du tiers; & sur l'argent on a donné au Roy quatre millions cinq cens mille livres, combien reste-il?

Du Revenu total 33000000 liv.
ôtez 4000000 l. sur les dixmes.
5000000 sur les heritages.
4500000 sur l'argent.
Reste 19500000 liv.

L'an 1675. les Turcs sont entrez dans la Pologne avec une Armée de 200000 combatans: Le Roy de Pologne en divers rencontres en a défait 45000, ils en ont perdus en differentes attaques de Places, dont ils ont esté repoussez ou qu'ils ont prises avec perte, 24900; on en a pris de prisonniers 19867, il en est mort de maladie 27532: il en a deserté 22000;

il y en a de bleſſez & hors de combat ou invalides 32701, combien en reſte-t-il ? qui de 200000

ôte	45000
	24900
	19867
	27532
	32701
Reſte	50000

Dans le premier dénombrement des Enfans d'Iſraël à la ſortie d'Egypte, il ſe trouva 603550 combatans : Et dans le ſecond, lors qu'ils furent preſts d'entrer dans la Terre de promiſſion, il s'en trouva 601730. combien y en avoit-il moins qu'au premier.

de	603550
ôtez	601730
Reſte	1820

CHAPITRE V.

Regle de Multiplication.

1. PLacez comme aux Regles precedentes le Multiplicateur ſous le nombre à multiplier.

2. Commençant à droite multipliez par tous les nombres du Multiplicateur, & mettez la premiere figure du produit ſous la figure du Multiplicateur.

3. Si le produit a deux figures mettez la premiere & gardez l'autre pour le rang ſuivant, en ne l'adjoûtant qu'aprés la Multiplication faite de ce rang.

4. Comme il viendra autant de ſommes particulieres qu'il y aura de nombres au Multiplicateur, adjoûtez-les toutes enſemble pour n'en faire qu'une.

Queſtions de Multiplication.

LE Soleil faiſant dans une heure deux cens ſoixante quinze mille lieuës, & la Lune dix mille; combien l'un & l'autre en font-ils en un jour naturel de 24 heures, & dans un an de 365 jours & 6 heures ? Multipliez 275000, & 10000 par 24, vous aurez pour le Soleil 63000000 &
par 24 *par 24*
pour la Lune 240000 lieuës qu'ils font en un jour ; & pour l'année du Soleil, aprés avoir multiplié 275000 par 6 pour les ſix heures, il viendra 1630000, on multipliera 63000000 par 365, & il viendra 25830000000, auſquels adjoûtant les 1630000, ce ſeront 25831630000, c'eſt à dire 25 bilions, 831 millions, & ſix cens trente mille lieuës que fait le Soleil en un an. Et la Lune 87660000, en multipliant 10000 par 6 pour les ſix heures & 240000 par 365.

Accipia-

Accipiat Subducendorum proximus ordo
Adjungatque ſuis numeris quot ſuppoſuiſti,
Unum ſi ſemel, aut duo ſi bis ſumpta decem ſunt;
Sic toties unum, eſſe decem quot ſuppoſuiſti:
Et ſi quid Reliqui ſcribatur lineolam infra.

Vide Exemplum II.

3. *Caſus.*

CUm multos numeros de multis ſubtrahis unà,
Lineola his interpoſita hos ſecernat ab illis:
A dextra incipiens primos dein quoſque locato;
In ſummas numeros cujuſcumque ordinis addens,
Primos à primis dein ordine ſubtrahe quoſque,
Et reliquum ſubſcribatur poſt lineolam infrà:
Vicinus tibi dat præcedens cætera Caſus.

Vide Exemplum III.

DIverſos ſpecie Numeros ſic ſubtrahe ut addis.

Vide Exemplum IV.

Ex. I.		*Ex. II.*		*Ex. III.*		*Ex. IV.*	
Datum.	975438	*Dat.*	11432909	*Dat.*	90692	*Dat.*	30 ſcu. 2 l. 18 ſ. 9 d.
Receptum.	884537	*Rec.*	7580942		30492	*Rec.*	16 ſcu. 2 l. 18 ſ. 8 d.
Reliquum.	90901		3590633		30791		12 ſcu. 1 l. 9 ſ. 3 d.
			170921	*Rec.*	29410	*Rel.*	1 ſcu. 1 l. 10. ſ. 10. d.
			90413		6721		
		Rel.	0000000		19532		
				Rel.	106312		

CAPUT V.

De Multiplicatione.

MUltiplicans, pone hunc toties, quot in illo erit unum.
A dextra incipiens, primos dein quoſque locato:
Quoſque per unamquemque ex ordine multiplicato;

Factum ſub primo, dein ordine ſcribito quæque,
Tot ſummæ, quot erunt in multiplicante figuræ,
Summæque incipiant proprio ſub multiplicante.
Quod Facti ſupra novem erit, pro ſede ſequenti
Servetur, quod Producto tantùm addito, poſtquam
Factum erit; ac deinceps ex ordine ducito quoſque.
Si plures fuerint ſummæ, illas addito in unum.
Quod ſi zero in principio ſint alterutrius,
Illis obmiſſis age, poſteàque illa notabis:
At ſi in principio fuerint infràque ſupràque,
Obmiſſis age; pòſt, quotquot ſint, ìlla notato.
Si quis per decem erit numerus tibi multiplicandus,
Huic unum zero adjice; per centum, duo; perque
Mille, tria; hocque modo tibi res erit abbreviata.

Ex. I.		*Ex. II.*
4		5467
2		238
8	*Summa 1 fig.*	43737
	Summa 2 fig.	16401
	Summa 3 fig.	10934
	Summa totalis.	1301146

Ex. III.	*Ex. IV.*	*Ex. V.*
12000	452	400
12	300	200
144000	135600	80000

Ex. VI.	*Ex. VII.*	*Ex. VIII.*
42	427	75496
10	100	1000
420	42700	75496000

Le Nombre d'or composé de 19 ans est le temps que le Soleil & la Lune employent pour se rencontrer en mesme point. Or pour le trouver on multiplie par 19 les années du Soleil comme si elles estoient chacune de 365 jours & 6 heures, quoy qu'elles ne soient que de 365 jours, 5 heures, & 49 m. c'est à dire 11 m. moins d'une heure. Et l'on multiplie aussi les années de la Lune par 19, en les contant comme si elles estoient chacune de 354 jours, 8 heures, 48 m. environ 38 sec. Les années du Soleil par 19 font 6939 jours, 18 heures.

365,	6 heures
19	19
6939	15

Les années de la Lune par 19 font 6732 jours 23 heures, 24 m. & presque 5 sec. qui font 228 mois, ausquels ajoûtant les sept mois intercalaires, qui font 206 jours, 17 heures, 8 m. 22 sec. la somme est 6939, 16 heures, 32 m. 27 sec. qui font en tout 235 conjonctions lunaires. Ainsi les 19 ans de la Lune sont moindres que ceux du Soleil d'1 heure, d'environ 25', & 32 sec. ce qui avoit fait environ 4 jours en l'espace de 1257 ans, depuis l'an du Concile de Nicée 325 jusqu'à l'an de la Correction 1582. Années de la Lune par 19.

	354 jours;	8 h.	48 m.	38 sec. environ
	19	19	19	19
	6732 jours,	23 h.	24 m.	2 sec.
	206	17	8 m.	22 sec.
Somme	6939	16 h.	32 m.	24 sec.

Il faut commencer la multiplication par les secondes, puis par les minutes, puis par les heures, & rejetter sur les premieres, 1 pour 60 sec. 1 pour 60 m. 1 pour 24 heures, à quoy adjoûtant 206 jours 17. heures 8 m. & 22 sec. on aura pour la somme 6939, 16 m. 32 m. 24 sec.

Pour avoir la Periode Julienne, qui est composée des trois Cicles ou revolutions des 28 Lettres Dominicales, de 19 du Nombre d'or & de 15 d'Indiction, il faut multiplier ces trois nombres l'un par l'autre de suite, en sorte que la somme du premier & du second soit multipliée par le nombre du troisiéme; & il n'importe pas, par lequel on commence. Ainsi 28 par 19 on aura 532, qui estant multipliez par 15 donneront 7980 pour la somme.

28
par 19
532
532
par 15
7980

CHAPITRE VI.

Regle de Division.

1. PLacez les Nombres en commençant à gauche, mettant la premiere figure du Diviseur sous la premiere du nombre à diviser, pourvû qu'elle soit moindre, sinon avancez le Diviseur d'un rang.

2. Cherchez combien le Diviseur est dans le nombre à diviser, ou du moins, la premiere figure dans celle ou celles qui sont au dessus, & marquez le quotient ou exposant à part.

3. Puis multipliez par le quotient chaque figure du Diviseur, en commençant à droite, & retirez chaque produit de cette Multiplication de chaque figure qui luy répond, en reservant les emprunts de chaque Soustraction pour les ajoûter au rang suivant du Diviseur, aprés la Multiplication.

4. Quand le Diviseur est plus grand que le nombre à diviser, on l'avance d'un rang vers la droite, & l'on marque un zero au quotient. Et s'il reste quelque chose aprés la derniere operation, on le met auprés du quotient au dessus du Diviseur, une petite ligne entre deux, & ce reste s'appelle Fraction.

Questions de Division.

POur trouver le Nombre d'or, & par son moyen l'Epacte, & par l'Epacte le jour de la Lune, & la Feste de Pasques;

Aprés avoir adjoûté 1 aux ans de Jesus-Christ, on divisera le tout par 19, le Quotient ou Exposant, marquera les revolutions des Cicles du Nombre d'or, qui se sont écoulées depuis la Naissance de Jesus-Christ, & ce qui restera sera le Nombre d'or cherché; s'il ne reste rien, le Nombre d'or sera 19.

15	154
1 Ex. en 1671, 1672 (88. puisqu'il ne reste	2. Ex. en 1675, 1676 (88 $\frac{4}{19}$
19 rien, 19 est le Nom-	19
19 bre d'or.	4 est le Nõbre d'or. 19

L'Epacte & le Nombre d'or commençent ensemble par 1, puis à chaque démarche que fait l'Epacte elle en passe 11 qui est le nombre dont l'année du Soleil de 365 jours passe celuy de la Lune, qui n'est que de 354; ainsi quand le Nombre d'or est à 2, l'Epacte est à 12, & quand le Nombre d'or est à 3, l'Epacte est à 23, & quand le Nombre d'or est à 4, l'Epacte est aussi à 4, parce qu'ayant adjoûté 11 à 23, elle est venuë à 34, or on

CAPUT VI.

De Divisione seu Partitione.

PArtitio dirimit quos Multiplicatio junxit.
Incipiendo sinistrorsùm, quoscumque locato.
Ultima, quæ prima est in Divisore figura,
Si major, vel sub primis quæcumque locantur
Si sint majores, sede unâ promoveantur,
Nilque vice hac primâ, pro motâ sede notetur.
Quæratur quoties Divisor in ordine suprà;
Et quia difficile est de totis scire figuris,
De prima tantùm quæratur, dummodo possit
Divisor retrahi in quotientem multiplicatus;
Et seorsùm Quotiens duplicem servetur in usum:
Primò ut nota tibi sit quæque operatio facta;
Nam tot erunt praxes quot & in quotiente figuræ:
Tum postquàm hunc in Divisorem duxeris, inde
Factum à supremo retrahas, sic semper agatur
Donec Partitio integri sit tota peracta;
Quot praxes, venient tot & in quotiente figuræ.
Quando Divisor superat, tunc promoveatur
Unâ sede, ac ad Quotientem cifra notetur:
Quod minus Integro superest, juxta Quotientem
Scribe supra Divisorem, ac ad Fracta remitte.

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*	*Ex. IV.*
8	4095 (105	87	1
2 (4	39 prima operatio	5616 (78	17 (4 $\frac{1}{4}$
	39 secunda op.	72	4
	39 tertia op.	72	

EXEMPLUM V.

Si ſit dividendus 19999100007 *per* 99999
ſic operatio fiet.

```
      29999      Quotiens
  19999100007   ( 199993
  99999999999
   999999999
    9999999
     99999
      99
```

EXEMPLUM VI.

Si dividendus ſit 90000009 *per* 7777
ſic operatio fiet

```
    2
   5 6 7
  4454 18
  12223518
  90000009   ( 11573 788/7777
  77777777
   777777
    7777
     77
```

Compendium diviſionis quando Diviſor eſt 10, *vel* 100, *vel* 1000.

CUm Diviſor erit decem, ut abbreviatio fiat,
A dextra primam é ſupremo tolle figuram;
Cùm centum, binas; tres, quando mille: figuræ
Si primæ hæ fuerint zero, Diviſio facta eſt;
Eſt quotiens reliquum; ſin, ex his Fractio fiet.

Ut ſi 240 per 10, fit Quotiens 24, ſublatâ primâ.
At ſi 243 per 10, fit Quotiens 24 $\frac{3}{10}$
Si 9600 per 100, fit Quotiens 96, ſublatis primis duabus.
At ſi 7515 per 100, fit Quotiens 75 $\frac{15}{100}$
Si 477000 per 1000, fit Quotiens 477 ſublatis tribus primis.
At ſi 556124 per 1000, fit Quotiens 556 $\frac{124}{1000}$

retranche toûjours 30 pour prendre ce qui est par dessus. Tellement que l'un & l'autre avançant par les mesmes démarches, ces deux Cicles se rencontreront toûjours à 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19. Ayant donc trouvé le Nombre d'or d'une année, il sera aisé d'en trouver l'Epacte. Car si ce n'est pas un des nombres de rencontres, il ne faudra qu'adjoûter autant de fois 11 au Nombre d'or, qu'il est éloigné du plus prochain Nombre de rencontre, par Exemple, si l'on veut sçavoir quel sera l'Epacte de 1677, aprés avoir adjoûté 1, & divisé 1678 par 19 il vient 6 au quotient; & comme 6 est éloigné de 4 de deux, il faut adjoûter deux fois 11 à 4, & l'on aura 26 d'Epacte pour l'année 1677.

Or pour trouver le jour de la Lune par l'Epacte, il faut adjoûter à l'Epacte le Nombre des mois qui se sont écoulez depuis le mois de Mars, luy compris, puis le quantiéme du mois, & retrancher 30 si tous ces Nombres le passent, sinon on prendra ce qui sera trouvé au dessous de 30, ou par dessus.

Exemple.

Le 18 d'Avril 1677, qui est dans le Calendrier, vis à vis de la lettre C, qui est celle du Dimanche de l'année 1677, quel jour sera-ce de la Lune? Ayant trouvé par le Nombre d'or, que l'Epacte de cette année est 26; j'adjoûte 2 de mois à 26 & 18 de mois, & cela fait 46: d'où retranchant 30 il restera 16, qui sera le quantiéme de la Lune du 18 d'Avril 1677. Or comme par le Decret du Concile de Nicée, la Feste de Pasques doit estre celebrée le Dimanche qui suit immediatement le 14e jour de la Lune de Mars; & qu'on appelle la Lune de Mars, celle dont le 14e jour tombe, ou le jour de l'Equinoxe du Printemps, qui arrive le 21 de Mars ou aprés ce 21 de Mars, je voy que le Dimanche 18 d'Avril 1677, qui est le 16e de la Lune doit estre le jour de Pasques; puisque le 14e de la Lune, qui estoit le Vendredy precedent, est la premiere pleine Lune qui soit arrivée depuis le 21 de Mars.





LIVRE TROISIE'ME.

Arithmetique Pratique des Fractions ou Nombres Rompus.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Fraction & du nom des Nombres Rompus.



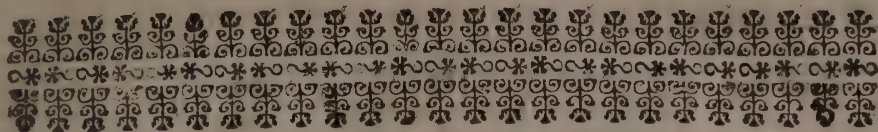
UAND aprés la Division il reste quelque chose qui n'a pû estre partagé, on appelle ce reste Fraction ; ou bien quand on se propose des Nombres ou des choses dont l'une est une partie de l'autre, comme la moitié, le tiers ou le quart, & alors cette partie & sa domination font deux nombres qu'on appelle Rompus, & qui se mettent l'un sur l'autre, avec une petite ligne entre deux. Celuy qui est au dessus s'appelle Numerateur, & celuy de dessous s'appelle Denominateur ; comme si l'on veut exprimer en Nombres, deux tiers, on met 2 dessus & 3 dessous, ainsi $\frac{2}{3}$; où l'on voit que 2 doit estre nommé Numerateur, parce qu'il nombre ou designe la quantité du Nombre inferieur, au lieu que 3 qui est dessous ne sert qu'à denommer la chose, & ainsi il doit estre appellé Denominateur.

Souvent il y a beaucoup de Fractions de suite qui ne dépendent point les unes des autres, comme, quand on dit $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$, c'est à dire deux tiers, trois quarts, cinq septiémes. Et quelquefois elles dépendent les unes des autres, comme quand on dit, la moitié du tiers de douze, qui s'exprimeroit ainsi en Nombres $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{12}$; alors pour les distinguer des autres, on met entre chaque Fraction la Particule *de* pour faire voir qu'elles dépendent les unes des autres, & pour cela on les nomme Fractions de Fractions.

CHAPITRE II.

Reduire les grandes Fractions à de moindres.

POur faciliter l'operation des Fractions, il les faut reduire à leurs moindres termes, c'est à dire les approcher l'un & l'autre de l'unité le plus qu'on peut. Ce qui se fait en les retirant l'un de l'autre alternati-

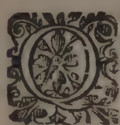


LIBER TERTIUS.

Arithmetica Practica Fractorum.

CAPUT PRIMUM.

Quid sit Fractio, & quî vocentur Numeri Fracti.

UOD de Diviso superest, huic Fractio nomen.
Fractorum duplex ordo; hic suprà, ille deorsùm:
Lineola iis interposita hunc secernet ab illo:
Supremus Numerat, Denominat infimus ordo;
Hic Nomenclator, Numerator dicitur alter.
Dicuntur Socij, quos unus junxerit ordo
Inferior vel supremus, queis nomen & unum est.

$\frac{1}{4}$ $\frac{15}{20}$ Numerator seu Numerans. / Denominator seu Nomenclator.

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ socij. / socij.

CAPUT II.

Reductio maximorum terminorum ad minimos seu primos terminos.

PArtitio ad minimos numeros alterna reducet,
Mensurâ hac quæ nil tibi post divisa relinquit:
Hæcque tibi illorum major mensura vocetur.

Hi minimi, aut primi, quos tantùm dividit unum.

ut 117	reduces alternâ divisione quousque invenias communem mensuram	sic	117	117 (9	minimi.
——			91	13	termini
91			26	——	
			13 mensura	91 (7	
				13	

Compendiosa Methodus reducendi maximos terminos ad suos minimos, seu inveniendi Communem mensuram quorumcumque numerorum.

HAc methodo, si Partitio tibi longa videtur,
Mensuras poteris numerorum agnoscere quasvis.

1. Unum, omnem numerum numerat, nihil immutando.

2. Si primum, totum numerat binarius ipse.

Id est, omnem parem numerat 2.

3. Si tria, sive novem, de collectis alicujus
& Cum potes, abijcias numeris, nilque inde supersit,
9. Ipsum per tria, perque novem poteris numerare.

Ut 5439 numerabit 3 [& 4869, metietur 9 & 3.

4. Si primos geminos, omnes quatuor numerabit

Ut 69816, quia 4 metitur 16, totum metietur.

5. Quinque etiam, si quinque aut zero prima figura.

Ut 4525 & 4920, metietur 5.

6. Sexque Pares numerat, quos & ternarius ipse.

Ut 4362 metitur 6 & 3.

7. Partitione opus est, septem ut dignoscere possis;
Vel; septem numerat, quem alij nequeunt numerare.

8. Tres primos numerans, totum numerabit & octo.

Ut 594368, quia 8 numerat 368, totum numerabit.

8. Vel; Summæ oblatæ tres primos dimidiato,
Si factum quatuor, totum numerabit & octo.

Ut 4368, quia dimidium 368, sc. 184. numerat 4, ergo & 8 totum.

10. Perque decem numera, cui zero prima figura.

vement, ou par la Soutraction si ce sont deux Nombres qui soient restez d'une Division, ou par la Division, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un Nombre qui les divise tous deux sans reste; & ce Nombre s'appellera leur commune mesure; & servira en les divisant separément l'un l'autre à les reduire à leurs moindres termes: que si l'on descendoit jusqu'à l'unité sans trouver d'autre commune mesure, alors il les faudroit laisser tous deux tels qu'ils estoient, parce qu'ils estoient en leurs moindres termes; ce qu'on appelle estre premiers entre eux.

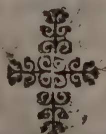
Ainsi si l'on propose 30 & 45, ou $\frac{30}{45}$, on ôtera 30 de 45, il restera 15, qui divisant 30 sans reste sera la commune mesure de 30 & de 45; & donnera 2 & 3 ou $\frac{2}{3}$ pour leurs moindres termes: mais si l'on proposoit 30 & 47, on viendroit jusqu'à l'unité, ainsi ils ne peuvent estre reduits à de moindres termes.

Pour éviter les reductions à de moindres termes.

CEtte reduction de Fractions à de moindres termes, n'est necessaire qu'entre les Nombres qu'ils appellent abstraits, c'est à dire qui ne sont appliquez à aucune matiere. Car quand il s'agit de matiere comme de monnoye ou autre chose, dont les parties ou Fractions ont des valeurs subordonnées, alors ny ces reductions ne sont pas necessaires, ny les Fractions ne doivent donner aucune peine; puis qu'alors au lieu de les reduire, il en faut augmenter ou multiplier le Numerateur selon son estimation ou valeur, en laissant en son premier estat le Dominateur qui tient icy le lieu de Diviseur.

Par exemple, aprés avoir divisé 64 liv. à 12 personnes, & trouvé qu'ils auront chacun 5 liv. & qu'il en restera encore 4 à partager à 12, au lieu de reduire 4 & 12 à de moindres termes, qui sont 1 & 3, qui voudroient dire qu'il leur faudroit encore chacun un tiers de livre, qui sont 6 s. 8 d. je reduiray d'abord ces 4 liv. en sols, & j'en auray 80, qui estant divisez par 12 donneront 6 s. chacun, & reste 8 s. que je reduis en deniers, & il vient 96, que je divise par 12, & il vient chacun 8 d. par dessus les 6 sols, tellement que divisant 64 liv. à 12 personnes, je trouve par ce moyen qu'ils ont chacun 5 liv. 6 s. 8 d.

Ainsi il sera aisé d'éviter ces reductions, en mettant les livres en sols & les sols en deniers. Et de mesme, en mettant les toises en pieds, les pieds en pouces & les pouces en lignes, & de mesme de toutes les autres mesures.



CHAPITRE III.

De la Reduction de deux ou plusieurs Fractions en une mesme Denomination.

CEtte Reduction est absolument necessaire pour les Regles des Fractions, & pour toutes les operations où il se rencontre des Nombres Rompus, qu'il faut avant toutes choses reduire sous un mesme Denominateur.

Quand il n'y a que deux Fractions comme $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$, on les reduit en multipliant en croix ou de travers le Denominateur de l'un par le Numerateur de l'autre, par exemple, 3 Numerateur de la premiere Fraction multipliera 6 Denominateur de la seconde, & fera 18 qu'on écrira au dessous du 3 :

Puis 5 Numerateur de la seconde Fraction multipliera 4 Denominateur de la premiere, & il viendra 20 qu'on écrira sous 5; & ainsi au lieu des deux premiers Numerateurs 3 & 5, on en a deux nouveaux plus grands qui sont 18 & 20 : Et pour avoir le seul Denominateur, il faudra multiplier les deux Denominateurs des Fractions proposées l'un par l'autre, c'est à sçavoir 4 & 6 & il viendra 24 qui sera le commun Denominateur.

Ainsi au lieu de $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ on aura $\frac{18 \; 20}{24}$ par la multiplication en croix, qui est la méme chose en plus grands nombres. Car 18 à l'égard de 24 est comme 3 à 4, puisque 6 qui est leur commune mesure est trois fois en 18 & quatre fois en 24: & 20 à l'égard de 24 c'est comme 5 à 6; puisque 4 qui est leur commune mesure est cinq fois en 20, & six fois en 24.

La méme chose arriveroit si des deux Numerateurs de la premiere Reduction on n'en faisoit qu'un en les multipliant l'un par l'autre, & prenant pour Denominateurs les deux Numerateurs qui ont esté multipliez en croix. Ainsi l'on auroit $\frac{15}{18 \; 20}$. Car 15 à l'égard de 18 seroit comme 5 à 6; puisque 3 est cinq fois en 15 & six fois en 18 : & 15 à l'égard de 20 seroit comme 3 à 4; puisque 5 est trois fois en 15 & quatre fois en 20. Nous verrons l'usage de ces deux sortes de Reduction, en méme Denomination & en méme Numeration, qui sont souvent necessaires l'une & l'autre.

Par exemple, si l'on dit que deux hommes ont differentes parties d'une méme somme, il faut reduire les Fractions en méme Denomination, c'est à dire, qu'aprés avoir multiplié en croix le Numerateur de l'une par le Denominateur de l'autre pour en faire deux Numerateurs differens, on multipliera les deux Denominateurs l'un par l'autre pour n'avoir qu'un seul Denominateur.

Mais si l'on disoit que deux hommes eussent une méme somme qui seroit differentes parties de deux autres sommes; alors il faudroit reduire les

CAPUT III.

Reductio duorum vel plurium Fractorum ad eandem denominationem.

BInos ſic Fractos rediges ſub Nomine eodem.
Hinc Numerans creſcat per eum qui Nominat illinc;
Tranſverſo crucis in formam ordine creſcat uterque.
Inde novi fient Numerantes; exque duobus
Unus Nomenclator erit, ſi multiplicent ſe.
Et fit idem, ex binis dum fit Numerantibus unus
Si ſint Nomenclatores facti Numerantes.

Exemplum I.

Ut ſi reducendi ſint $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$ ad eandem denominationem.

Sic tranſverſim multiplicabuntur. $\frac{3}{4}$ X $\frac{5}{6}$

Duo Numerantes.
Ex mult. 3 in 6, 18 — 20 ex mult. 4 in 5.
Unus Nomenclator ſeu den. 24 *ex multipl. 4 in 6.*

Exemplum II.

$\frac{3}{4}$ X $\frac{5}{6}$

Unus Numerator ex multipl. 3 in 5
15

Duo den. 18, 20. extranſverſa multipl. 3 in 6. & 4 in 5.

CUm plures fuerint, omnis dabit infimus ordo
Nomenclatorem, ſi ducas quoſque viciſſim:
Augeat hunc quivis Numerans; ac dividat alter,
Scilicet ex primis Nomenclatoribus unus
Sic auctum Nomenclatorem per Numerantes:
Hinc quivis Quotiens, Numerans: nova fractio prodit

Æquivalens primæ, Nomenclatore sub uno
Qui fuit ex primis Nomenclatoribus auctus.

Ut si sint reducendi hi tres.

$$\frac{2}{3}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{6}{7}$$

Multiplicentur in se 3, 5, & 7: ex 3 in 5, fit 15; ex 15 in 7 fit 105.
Tum multiplicetur 105 per 2, 4, 6 | ex 2 in 105 fit 210; ex 4 in 105 fit 420; ex 6 in 105 fit 630.
Tandem dividatur 210 per 3; 420 per 5, & 630 per 7; & venient Numerantes in quotientibus, scilicet 70, 84, 90, quibus supponetur 105; & erit nova fractio æquivalens primæ.

$$\frac{70,\ 84,\ 90.}{105}$$

CAPUT IV.

Reductio Integri & Fracti ad unum & idem Fractum.

Sic ad idem Fractum; Integrum Fractumque reduces:
Ducito in Integrum, fractum quod Nominat; illi
Addatur Numerans; Nomenclatore retento,
Mutatus solus Numerans inde auctior exit.

Ut si detur Integrum 4. & fractum $\frac{3}{4}$ sic reduces ad idem fractum, multiplicando integrum 4, per 4 Nom. fracti, & fiet 16, dein addendo 3 Numer. fracti fit 19, & sic retento 4 Num. fracti, fit unica fractio.

$$\frac{19}{4}$$



Fractions en méme Numeration, c'eſt à dire, qu'aprés avoir multiplié en croix le Denominateur de l'une par le Numerateur de l'autre pour en faire deux Denominateurs differens, on multipliera les deux Numerateurs l'un par l'autre pour n'avoir qu'un ſeul Numerateur.

Exemple de Reduction en méme Denomination.

Pierre & André ont partagé une ſomme de 18000 liv. ou telle autre qu'on voudra. Pierre en a eu la moitié, & André le tiers, & ils ont donné le reſte aux pauvres. Combien ont-ils eu chacun & qu'on-t-ils donné. Il faut reduire en méme Denomination la moitié & le tiers $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$,

& Pierre aura pour ſa part, 3 qui eſt la moitié de 6; & André aura pour la ſienne 2, qui eſt le tiers de 6; & ſi l'on adjoûte 3 & 2 qui ſont les deux parts de Pierre & d'André on aura 5, & il reſtera un ſixiéme pour la part des Pauvres.

Or on peut ſuppoſer telle ſomme ou Denominateur qu'on voudra en la place de 6; par exemple 18000 liv. & l'on en donnera à Pierre la moitié qui ſera 9000. & à André le tiers qui ſera 6000; & aux Pauvres le ſixiéme, qui ſera 3000.

Exemple de Reduction en méme Numeration.

Deux hommes ont partagé deux Succeſſions differentes, & ont eu chacun une méme ſomme, c'eſt à dire, autant l'un que l'autre. Le premier a eu les $\frac{4}{7}$ de ſa Succeſſion, & l'autre les $\frac{5}{11}$ de la ſienne. En reduiſant en méme Numeration les $\frac{4}{7}$ & $\frac{5}{11}$ on aura $\frac{20}{44}$ $\frac{20}{35}$, on voit que 20 eſt les $\frac{5}{11}$ de 44, puiſque 4 qui eſt leur commune meſure eſt cinq fois en 20, & unze fois en 44, & qu'auſſi 20 eſt les $\frac{4}{7}$ de 35; puiſque 5 qui eſt leur commune meſure eſt quatre fois en 20, & ſept fois en 35. On peut ſuppoſer telle autre Somme ou Numerateur qu'on voudra, par exemple 40000 au lieu de 20; & les deux Denominateurs ſeront 88000. & 70000. dont 40000. ſera auſſi les $\frac{5}{11}$ & les $\frac{4}{7}$ comme 20 l'eſtoit des premiers.

Quand il y a plus de deux Fractions à reduire ſous une méme Denomination comme $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$, il faut prendre d'abord tous les Denominateurs, c'eſt à dire, le rang de deſſous qui ſont icy 3, 5 & 7, & les multiplier l'un par l'autre, & leur produit; 3 fois 5 font 15, 15 fois 7 font 105, qui ſera le Denominateur commun de la nouvelle Fraction.

Puis tous les Numerateurs ſeparément multiplieront le nouveau Denominateur; ainſi 2 multipliant 105, donnera 210, & 4 le multipliant donnera 420, & enfin 6 le multipliant donnera 630.

Aprés on prendra chacun de ces Numerateurs, & l'on les diviſera ſeparément & par ordre par chacun des premiers Denominateurs.

Ainſi 3 diviſant 210, donnera pour le premier Numerateur 70; & 5 diviſant 420, donnera pour le ſecond Numerateur 84; & enfin 7 diviſant

630, donnera pour troisiéme Numerateur 90 ; & l'on aura pour nouvelle Fraction sous le seul Denominateur 105, celle-cy qui équivale à la precedente $\frac{70\ 84\ 90}{105}$

Car 70 à l'égard de 105, est de méme que $\frac{2}{3}$, & $\frac{84}{105}$ est de méme que $\frac{4}{5}$ & enfin $\frac{90}{105}$ est comme $\frac{6}{7}$; ainsi qu'on le peut prouver en les reduisant chacun à leurs moindres termes.

CHAPITRE IV.

Reduire un Nombre entier & une Fraction, en une seule Fraction.

IL faut multiplier l'entier par le Denominateur de la Fraction, & adjoûter au produit de cette Multiplication le Numerateur de la Fraction, & mettre ce produit & ce Numerateur, adjoûtez ensemble, sur le Denominateur tel qu'il estoit, & la chose est faite. Ainsi si l'on propose 5 $\frac{2}{3}$ à reduire en une seule Fraction, aprés avoir multiplié 5 par 3, qui fait 15, on adjoûtera 2 à 15, & l'on aura 17 qu'on mettra sur le Denominateur 3, & l'on aura le tout reduit en une Fraction $\frac{17}{3}$

CHAPITRE V.

Reduire en Fraction & entier s'il y échet le Numerateur plus grand que n'est le Denominateur de la Fraction.

IL faut diviser le Numerateur par le Denominateur.

Si le Denominateur est precisément contenu plusieurs fois dans le Numerateur, alors il ne viendra qu'un entier comme si on divisoit $\frac{16}{4}$ il viendroit 4 : mais s'il n'y est pas contenu precisément il viendra un entier & Fraction : comme $\frac{17}{3}$, il viendra $5\frac{2}{3}$

CHAPITRE VI.

Trouver la valeur des Fractions.

PAr exemple, quand il s'agit de monnoye, & qu'il reste des livres d'une division faite, parce que le Denominateur est plus grand que le Numerateur de la Fraction qui denote les livres, il faudra reduire les livres en sols, & les sols en deniers. Pour reduire les livres en sols il faut multiplier le Numerateur par 20, qui est la valeur de chaque livre, & les

CAP. V.

CAPUT V.

Reductio Numeratoris majoris quàm sit denominator, ad Integrum & Fractum, si opus est.

DIvidito Numerantem; Integrum & Fractio prodit: Fractio; ni major præcisé multiplus extet.

sic $\frac{19}{4}$ per 4 reducentur ad (4 & $\frac{3}{4}$ integ. & fract.

At si $\frac{16}{4}$ sint reducenda, fiet (4. nulla fractio quia 16 est multiplus 4.

CAPUT VI.

Fractionum æstimatio seu valor.

INtegri Summa aut libræ, vel pondera certa:
Duc Summam Integri in Numerantem; divide factum
Per Nomenclatorem, erit in quotiente petitum.

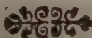
Exemplum.

Quot faciant solidos, libræ, tres (quæro) quadrantes:
Duco tria in summam, quæ viginti solidorum est,
Divido, per quatuor, sexaginta; inde petitum.

quòt faciant $\frac{3}{4}$ libræ? | duco 3 Num. in 20 s. summam libræ, & fit 60. deinde divido 60 per 4 Nom. & venit 15 s. ergo $\frac{3}{4}$ libræ valent 15 solidos. 60 per 4 (15

Sic aliter: Nomenclatoris quære valorem;
Et ducatur in hunc Numerans, potieris adepto.

Ut valor 4 seu quadrantis libræ est, 5 s. ex 3 in 5 fit 15 s. & sic $\frac{3}{4}$ libræ valent. 15 s.



CAPUT VII.

Additio Fractionum.

FRactis adductis Nomenclatore ſub uno;
Omnes junge ſimul Numerantes: Reſque peracta eſt.

Ut ſi addendi ſint $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ſic adductis ſub una den. per Cap. 3. $\frac{2}{3} X \frac{4}{5}$ | $\frac{10 \quad 12}{15}$ junges Numerantes 10 & 12 & habebis. $\frac{22}{15}$ id eſt, $1\frac{7}{15}$ per Cap. 5

CAPUT VIII.

Subtractio Fractionum.

UT prius adductis Nomenclatore ſub uno;
Si bini fuerint, Numerantem hunc ſubtrahe ab illo.

Ut $\frac{2}{3} X \frac{4}{5}$ | $\frac{10 \quad 12}{15}$ ſubtr. $\frac{2}{15}$

Si plures cupias Fractos minimos minimorum
Pluribus ex minimis minimorum ſubtrahere, omnes
Suſdeque in ſocios duc, ut ſit Fractio bina:
Utrâque adductâ Nomenclatore ſub uno;
Tunc, ut præceptum, Numerantem hunc ſubtrahe ab illo.
Partitio ad minimos, ſi opus eſt, alterna reducet.

Ut ſi ſint ſubducendi $\frac{6}{7}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}$ ex $\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}$

ex ſociis in ſe ductis, | fit $\frac{72}{140} X \frac{24}{60}$ | $\frac{4320 \quad 3360}{8400}$ | Subtr. $\frac{960}{8400}$ | Red. $\frac{4}{35}$ | per 240

Fractum ex Integro ſi mens eſt ſubtrahere, unum
Commodet Integrum, quod ſuſdeque æquiparabis
Nomenclatori, alteraque hinc nova fractio fiet

ſols par 12 qui eſt la valeur en deniers de chaque ſol. Comme ſi on vouloit ſçavoir la valeur de cette Fraction $\frac{4}{16}$, c'eſt à dire, en ſuppoſant que 4 ſont des livres, combien ſeize auroient chacun de ſols, aprés avoir reduit 4 liv. en 80 ſ. par 20, on diviſera 80 par 16, & il viendra 5, qui fera voir que $\frac{4}{16}$ valoient 5 ſ.

CHAPITRE VII.

Addition de Fractions.

IL faut mettre en méme Denomination les Fractions qu'on veut adjoûter : & puis adjoûter les deux Numerateurs enſemble, & les mettre ſur le Denominateur.

Ex. I.	Ex. II.	Ex. III.
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$
$\frac{8 \quad 3}{12}$ $\frac{11}{12}$	$\frac{6 \quad 3}{9}$ $\frac{9}{9}$	$\frac{12 \quad 15}{18}$ $\frac{27}{18}$

Aprés que les deux Numerateurs ont eſté adjoutez, & leur ſomme miſe ſur le commun Denominateur, ou cette ſomme eſt moindre que le Denominateur, comme dans le I. Ex. ou elle luy eſt égale, comme dans le II. Ex. ou elle eſt plus grande, comme dans le III. Ex.

Et c'eſt par l'Addition qu'on connoiſt ſi les parties ou Fractions qu'on avoit priſes ſont moindres, égales ou plus grandes que l'entier.

Or il faut remarquer qu'encore qu'on ne puiſſe pas prendre dans un entier plus de parties qu'il y en a, neanmoins il arrive ſouvent que les parties ou Fractions ſont plus grandes que l'entier, ce qu'on connoiſt lorſque les deux Numerateurs eſtant aſſemblez font une plus grande ſomme que le Denominateur. Et afin qu'on ne s'y trompe pas & qu'on n'accuſe pas les Auteurs de s'y eſtre trompez, lors qu'ils ont ſuppoſé qu'on partageoit une ſomme en des parties qui ſe trouvoient faire une ſomme plus grande, il faut ſçavoir que l'on agit en deux manieres à l'égard de l'entier, l'une par voye de deſtruction, l'autre de comparaiſon. La premiere eſt lorſqu'on retire les parties de l'entier pour les diſtribuer, & lors vous le détruiſez en luy ôtant ſes parties : La ſeconde en le laiſſant en ſon entier, & regardant ſes parties comme ſi on les tiroit d'un autre entier qui luy fuſt égal, puis comparant ces parties à cét entier pour voir quelle proportion ou rapport elles ont à ſon égard.

Ex. du premier Cas. Un homme donne les deux tiers & un quart de son argent, que luy reste-t-il? Reduisez en méme Denomination $\frac{2}{3}$ X $\frac{1}{4}$ & ad-
$\frac{8 \quad 3}{12}$
joûtez les deux Numerateurs 8 & 3, vous aurez $\frac{11}{12}$ & ainsi il luy reste $\frac{1}{12}$ c'est à dire une douziéme partie de son argent.

Ex. du second Cas. Un homme a une somme d'argent, un autre en a les deux tiers, & les trois quarts de pareille somme, combien en ont-ils plus ou moins l'un que l'autre? Mettez en méme Denomination les deux tiers & les trois quarts $\frac{2}{3}$ X $\frac{3}{4}$ adjoûtez les deux Numerateurs, 8 & 9, & les
$\frac{8 \quad 9}{12}$
mettez sur le Denominateur $\frac{17}{12}$, & le second en aura $\frac{1}{12}$ plus que le premier.

CHAPITRE VIII.

Soutraction des Fractions.

QUand il n'y a que deux Fractions, aprés les avoir reduites en méme Denomination, ôtez le moindre Numerateur du plus grand.

Ex. Si l'on veut ôter $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, on les reduira $\frac{18 \quad 20}{24}$ & l'on ôtera 18 de 20, il restera $\frac{2}{24}$ ou $\frac{1}{12}$.

S'il y a plusieurs Fractions de Fractions à retirer de plusieurs autres Fractions de Fractions; on multipliera tous les Numereteurs les uns par les autres, & tous les Denominateurs aussi les uns par les autres, afin de ne faire que deux Fractions; qu'il faudra ensuite reduire en méme Denomination; puis on ôtera le moindre Numerateur du plus grand; & parce que les Fractions ont esté portées à de plus grands termes, on reduira s'il se peut le Numerateur restant, & le Denominateur commun à leurs moindres termes.

Ex. Si l'on veut ôter $\frac{6}{7}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$; on multipliera 6, 4, 3 qui feront 72, puis 4, 3, 2, qui font 24, pour les deux Numerateurs; puis on multipliera 7, 5, 4, qui font 140, puis 5, 4, 3 qui font 60 pour les deux Denominateurs qu'on reduira à un seul $\frac{72}{140}$ X $\frac{24}{60}$ & l'on aura $\frac{4320 \quad 3360}{8400}$ & la Soustraction estant faite il restera $\frac{960}{8400}$ c'est à dire, en moindres $\frac{4}{35}$.

Si l'on veut soutraire une Fraction d'un entier comme $\frac{2}{3}$ de 4, il faut mettre l'unité sous l'entier pour en faire une Fraction, & l'on aura ainsi pour les deux Fractions $\frac{4}{1}$ $\frac{2}{3}$ qu'on reduira en méme Denomination, & il viendra $\frac{12 \quad 2}{3}$ puis retirant 2 de 12, il restera $\frac{10}{3}$ c'est à dire en moindres termes $3\frac{1}{3}$.

Excedens primam; ductam in ſe ſubtrahe ab iſta:
Mutuum ab Integro tollens quod præſtitit unum.

Ut ſi vis ſubtrahere $\frac{2}{3}$ ex 4 | ſume 1 ex 4, & fac novam fractionem ſuſdeque æquip. Nom. | ſic $\frac{3}{3}$ X $\frac{2}{3}$ (9, 6; 9) ſi tollas 6 ex 9, reſtant $\frac{3}{9}$ id eſt $\frac{1}{3}$. ergo $\frac{2}{3}$ ex 4 | fit 3 $\frac{1}{3}$

Vel

Unum pone ſub Integro, ac ſub nomine eodem
Utriſque adductis, Numerantem hunc ſubtrahe ab illo.

Ut $\frac{2}{3}$ ex 4 $\frac{4}{1}$ X $\frac{2}{3}$ $\frac{12}{3}$ $\frac{2}{3}$ Reliq. $\frac{10}{3}$ ſeu 3 $\frac{1}{3}$

At ſi ex Integro Fractoque, Integrum, aliudve
Fractum quod majus ſit, tollas; quod minus, unum
Quærat ab Integro proprio, quod & æquiparatum
Nomenclatori proprio, jungat Numeranti:
Fractis adductis Nomenclatore ſub uno,
Perfice; ab Integro retrahens quod præſtitit unum.

Ut ſi ſubtrahenda 3 $\frac{2}{3}$ ex 7 $\frac{2}{5}$ | à 7 ſume 1. $\frac{5}{5}$ ex quo fiet $\frac{5}{5}$ remanente 6. | junge 5 & 2 fient $\frac{7}{5}$

tum adduce ad eandem den. $\frac{2}{3}$ X $\frac{7}{5}$ (10, 21; 15) | ſubtrahe 10 à 21 fit $\frac{11}{15}$ | ſubtrahe integra 3 à 6 & fit. 3 $\frac{11}{15}$

CAPUT IX.

Multiplicatio Fractionum.

DUc in ſe ſocios; hinc unica fractio reſtat,
Quam, ſi opus eſt, ad primos partitione reduces.

Ut ſi ſint multiplicandi $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ | ex in 3, fiant 6 / ex 3 in 4, 12 | $\frac{6}{12}$ | reducti $\frac{1}{2}$

Si vis Integrum Fractumque, Integro aliove
Fracto multiplicare, ad idem illa reducito fractum;
Duc ſocios in ſeſe, hinc unica fractio reſtat;

Quam, ſi opus eſt, ad primos partitione reduces.

Ut ſi ſint multiplicandi $2\frac{1}{2}$ per $4\frac{2}{3}$ | ſic reduces ad idem fractum $\frac{5}{2}$. $\frac{14}{3}$ | $\frac{70}{6}$ ſeu $\frac{35}{3}$.

CAPUT X.

Diviſio Fractionum.

UT priùs adductis Nomenclatore ſub uno;
Solos dividito Numerantes; Reſque peracta eſt:
Nomenclatorem nihil hæc operatio curat.

Ut ſi ſint dividendi $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{3}$ | adductis ad eandem den. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ | diviſio 15 per 14 ($1\frac{1}{14}$

14 15
21

Si vis Integrum & Fractum, per Fractum, aliudve
Integrum partiri, ad idem illa reducito Fractum:
Ac deinde adductis Nomenclatore ſub uno;
Solos dividito Numerantes: Reſque peracta eſt.

Ut ſi ſint dividendi $3\frac{1}{2}$ per $2\frac{2}{3}$ | Reductis ad idem fractum $\frac{7}{2}$ $\frac{8}{3}$ | ac redactis ad eand. den. $\frac{7}{2} \times \frac{8}{3}$ | diviſio 21 per 16 ($1\frac{5}{16}$.

21 16
6



Si l'on veut ôter un entier & Fraction d'un autre entier & Fraction, & que la Fraction d'où l'on veut ôter soit moindre que l'autre, alors celle qui est moindre empruntera une unité de son entier, qui sera ainsi diminué d'une unité; & de cette unité empruntée on formera un nombre égal au Denominateur de la méme Fraction, puis on le joindra à son Numerateur, comme si de $7\frac{2}{5}$ on vouloit ôter $3\frac{2}{3}$; parce que $\frac{2}{3}$ font plus grands ou valent plus que $\frac{2}{5}$; cette moindre Fraction empruntera de son entier 7 une unité, & cét entier ne vaudra plus que 6, & de cette unité on en fera un nombre égal au Denominateur de la Fraction $\frac{2}{5}$, c'est à dire 5, qu'on joindra à 2, & l'on aura $\frac{7}{5}$ aprés avoir reduit les deux Fractions en méme Denomination $\frac{2}{3}$ X $\frac{7}{5}$ qui feront $\frac{10}{15}\frac{21}{15}$ on ôtera les entiers des entiers, 3 de 6, & les Fractions, des Fractions 10 de 21, & il restera $3\frac{11}{15}$.

CHAPITRE IX.

Multiplication des Fractions.

IL faut multiplier les Numerateurs l'un par l'autre, & les Denominateurs aussi l'un par l'autre; & il ne viendra qu'une seule Fraction, dont on reduira les termes à de moindres s'il se peut ou s'il est necessaire.

Ex $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$ | deux fois 3 font 6; 3 fois 4 font 12; $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$.

Si de chaque costé il y a entier & Fraction, on reduira le tout en Fractions; puis on fera la Regle, comme il vient d'estre dit.

Ex. $2\frac{1}{2}$ par $4\frac{2}{3}$; reduits en Fractions, donnent $\frac{5}{2}\frac{14}{3}$ qui multipliez l'un par l'autre, font $\frac{70}{6}$ ou $\frac{35}{3}$.

CHAPITRE X.

Division des Fractions.

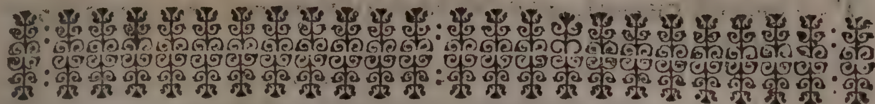
IL faut reduire les Fractions en méme Denomination, & diviser les Numerateurs l'un par l'autre, sans se mettre en peine du Denominateur. Ainsi si l'on veut diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$; aprés les avoir reduits en méme Denomination, on aura $\frac{4}{6}\frac{3}{6}$, & divisant 4 par 3, on aura $1\frac{1}{3}$.

Il est plus commode de faire la Division par la Multiplication sans reduire en méme Denomination. Pour cela il ne faut que renverser sans dessus dessous les deux nombres du Diviseur, & puis faire la multiplica-

tion. Par exemple ſi on veut diviſer $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$ en renverſant le Diviſeur ainſi $\frac{3}{2}$ & faiſant la multiplication $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{2}$ l'on aura $\frac{3}{4}$. Et ſi on diviſe $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, en renverſant le Diviſeur $\frac{2}{1}$ & faiſant la multiplication $\frac{2}{3}\ \frac{2}{1}$ on aura $\frac{4}{3}$ ou $1\ \frac{1}{3}$. De meſme $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$ en renverſant & faiſant la multiplication $\frac{5}{7}\ \frac{3}{2}$ on aura $\frac{15}{14}$ ou $1\ \frac{1}{14}$.

S'il y a entier & Fraction à diviſer par entier & Fraction, on mettra tout en Fractions ; & puis on diviſera par la multiplication, comme nous venons de dire. Ex. $3\ \frac{1}{2}$ par $2\ \frac{2}{3}$; en Fraction $\frac{7}{2}\ \frac{8}{3}$, en renverſant le Diviſeur on aura par la multiplication $\frac{7}{2}\ \frac{3}{8}$, $\frac{21}{16}$ ou $1\ \frac{5}{16}$.





LIBER QUARTUS
ARITHMETICA SPECULATIVA,

Continens quidquid scitu dignum tùm sparsim in Libris Arithmeticorum, cùm præsertim in Euclidis 5. 7. 8. & 9. Elementorum, de Proportionibus & Numeris habetur.

CAPUT PRIMUM.

Definitiones & Divisiones Numerorum.

PER Monadem; quodcumque existens dicitur unum.
Est mensura monas, numerum quæ dividit omnem;
Nam repetita monas numero reperitur in omni:
Hic etenim Monadum est summam collectio in unam.
Ut 4, est 1, 1, 1, 1, quater.
Par numerus, binas quem in partes dividis æquas.
Ut 4 in 2 & 2 | 6 in 3 & 3.
Impar, in quo pars binarum una est minor uno.
Ut 7 in 4 & 3 | 9 in 5 & 4.
Par pariter, quem par numero pare dividit æquè,
Perque pares hinc atque illinc descendit ad unum.
Ut 8 quem 2 in 4 & 4, 2 & 2, 1 & 1.
Ast par impariter, quem par numero impar efindit.
Ut 42, quem 6 per 7.
Impar impariter, quem impar numero impare scindit.
Ut 15, quem 3 per 5.
Is Primus numerus, quem tantùm dividit unum.
Ut 2, 3, 5, 7, 11, 13, &c.
Hi Primi interse, quos tantùm dividit unum.
Ut 3 & 4: 5 & 7: 8 & 11.
In Numeris, metiri & dividere, unum & idem sunt.
Cùm nil dividat ipsa monas, remanent numeri ut sunt.
Hinc primos reputato, monas quos dividit una.
Ut 3 & 4 | 4 & 7. | 7 & 13. &c.

Pars hæc est numeri, quæ exactè dividit illum.

Ut 2, qui, 6, ter.

Partes, quæ superant repetitæ, deficiuntve.

Ut 3 ad 7, quem nec bis nec ter æquat | 6 ad 16.

Multiplus est, qui continet in se sæpé minorem.

Ut 6 ad 2, quem ter præcisé.

Ergo multipli proprié submultiplus est pars.

Ut 4 ad 12, quem ter præcisé metitur.

Ni sint Multiplices, Communem quærito primam
Mensuram, quam alterna tibi Divisio tradet:

Ut 12 & 8, quos 4 reducit ad 3 & 2.

Si nulla hinc veniat, sed tantùm hos dividit unum,
Hos Primos reputato, monas quos dividit una.

Ut 7 & 11, quos sola unitas metitur.

Compositus, præter monadem quem dividit alter.

Ut 4 quem 2 | 6 quem 2 & 3 | 9 quem 3 | 12 quem 2, 3, 4, 6. &c.

Compositi interse, metrum commune quibus fit.

Ut 4 & 6 per 2 | 8 & 12 per 4 | 9 & 12 per 3. &c.

Ex quibus alter erit, Radixve, latusve vocantur.
Ex binis factus, Planus; latera istius, illi.

Ut ex 2 in 3 fit 6 | ex 3 in 4 fit 12 | 2 & 3 sunt latera Plani 6. | 3 & 4 lat. 12.

Exque tribus factus, Solidus; latera istius, illi.

Ut ex 4, 5, 6, insese fit 120, Solidus, cujus latera 4, 5, 6.

Ex se, Quadratus; vel, qui ex æqualibus æquus.

Ut ex 4 inse fit 16. qui ex 4 in 4. | sic ex 3 in 3 fit 9. quadrat.

Dicitur ille Cubus, tribus ex æqualibus æquus.

Ut ex 3, 3, 3 insese ductis fit 27 Cubus.

Est Diametralis numerus, cujus Diametri
Quadratum, binis laterum est æquale quadratis.

Ut 12 est numerus diametralis: nam diametri ejus 5 quadratum 25 est æquale quadratis duobus laterum ejus 3 & 4, nempe 9 & 16, quæ 25.

Ducta in se Diametralem latera; atque quadrata
Ipsorum laterum duo juncta, dabunt Diametri
Quadratum; radixque quadrati ipsam Diametrum.

Ut ex 3 in 4 fit diametralis 12: ex quadratis laterum junctis 9 & 16 fit 25 quadratum diametri 5.

Ex tribus hisce Triangulus est Rectangulus, in quo
Majoris lateris quadratum æquale duobus

Quadratis simul assumptis laterum est minimorum.

Ut 3, 4, 5 faciunt in Numeris Triangulum Rectangulum; nam 25 quadratum 5 est æquale 9 & 16 quadratis 3 & 4.

Dimidium Diametralis numeri Area dicta est,

Areaque in Numeris poterit numquam esse quadratum.

Ut diametralis 12 dimidium 6, area trianguli 3, 4, 5. 6 autem non est quadratum, & sic de aliis.

Nec Diametrali numero datur esse quadratum;

Radices Diametrales plures nec habere

Quam binas, quamvis fiat productum aliarum.

Sic 12 tantummodò 3 & 4 habet pro radicibus diametralibus, licet alias habeat partes eum producentes ut 2 & 6. | 3 autem & 4 sunt diametrales partes, quia eorum quadrata æqualia sunt quadrato diametralis 5.

Si Plani, aut Solidi, similes; ratio his laterum æqua.

Ut 6 & 24 sunt Plani similes, quia latera 6 sunt 2 & 3, & latera 24 sunt 4 & 6, in ea ratione quam habent 2 & 3.

Sic 24 & 192 sunt Solidi similes, quia latera 24 sunt 2, 3, 4; & latera 192, sunt 4, 6, 8, in eadem ratione quam 2, 3, 4.

Perfectus Numerus, proprijs qui Partibus æquus:

Partes hîc vel pars nullo discrimine habentur.

Ut 6 quem faciunt 1, 2, 3. | sic 28, cujus partes 1, 2, 4, 7, 14.

Partibus at proprijs Numerus minor, ille Minutus.

Ut 8, cujus partes 1, 2, 4, quæ tantùm 7 | sic 14, cujus partes 1, 2, 7.

Estque Superfluus, is qui partibus est superatus.

Ut 12, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6, faciunt 16. | sic 24, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, faciunt 36.

CAPUT II.

Definitiones ac Divisiones Rationum & Proportionum.

EST Ratio simplex, Numerorum habitudo duorum.

Ut 2 ad 3.

At Proportio erit, Rationum habitudo duarum.

Sicut 2 ad 3, sic 4 ad 6.

Sæpiùs hîc pro uno Ratio & Proportio sumpta.

Sic indifferenter dicitur Ratio aut Proportio, 2 ad 3.

Res illæ Rationem ad se dicuntur habere

Quando auctæ quocumque modo, ſe excedere poſſunt:
Ergo omnis Numerus Rationem cum altero habebit,
Cùm quemcumque alium quivis excedere poſſit.
Ut 4 ad 6, multiplicatis utriſque per 2, fit 8 & 12 | &c.
Tunc ij dicuntur numeri Ratione in eadem
Primus ad alterum, & ad quartum ſic Tertius eſſe,
Cum quocumque modo primus vel Tertius aucti;
Aucti etiam quocumque modo, Quartuſque, Secundus,
Talis multiplex primi ad ternum, atque ſecundi
Multiplex erit ad quartum, ſeu deficiant, ſeu
Excedant, ſive æquales utrique ad utroſque.

Ut 4 ad 2, & 6 ad 3, ſunt in Ratione eadem;

quia dum aſſumitur
duplum primi & triplum ſecundi.
ita etiam duplum tertij.
& triplum quarti.

Ut 8 ad 6, ita 12 ad 9

triplum primi & tertij.
& ſextuplum ſecundi & quarti.

Ut 12 ad 12, ita 18 ad 18

Duplum primi & tertij.
& octuplum ſecundi & quarti.

Ut 8 ad 16 ita 12 ad 24.
ſemper eſt eadem ratio primi ad ſecundum.
& tertij ad quartum.

Duplex eſſe poteſt Numerorum habitudo ſequentum,
Continua & Diſcreta; ſub iſtâ ſufficit, ut ſit
Tertius ad quartum, quales ſunt Primus & alter;
Cumque ſecundo ullam haud rationem Tertius ambit.
Continuâ verò tunc ſunt Ratione in eadem,
Cum qualis Numerus ſit Primus ad alterum, & alter
Sic erit ad ternum, ad quartum & ſic tertius iſte.

Diſcreta, Ut 2 ad 3, ſic 4 ad 6.
[2 4, 8, 16
Continua [Ut 2 ad 4 | ſic 4 ad 8, & 8 ad 16.

In tribus ad minimum numeris Proportio ſtabit,
Continua in tribus, in quatuor Diſcreta manebit:
Et cùm tres in Continuâ, bis ſume ſecundum.

Continua Ut 4, 6, 9 | id eſt ut 4 ad 6, ſic 6 ad 9.
Diſcreta Ut 4 ad 6, ſic 8 ad 12.

Hos Rationales eſſe, aut Ratione in eadem

Dicemus, queis continget Proportio quædam.
Quintuplex ad majorem est habitudo minoris:
Aut ille hunc semel & partem insuper illius unam
Continet; aut semel & partes; aut multiplus illi est;
Aut multiplus, adhuc partem insuper illius unam;
Aut multiplus, adhuc & partes continet in se.
Est & adhuc Ratio Æqualis, quam habet æquus ad æquum.

Ut 2 ad 2, Ratio æqualitatis
Quinque Rationes Inæqualitatis

1.ª Ut 3 ad 2, & dicitur Superparticularis.
2.ª Ut 5 ad 3, Superpartiens.
3.ª Ut 4 ad 2, Multiplex.
4.ª Ut 5 ad 2, Multiplex superparticularis.
5.ª Ut 11 ad 3, Multiplex superpartiens.

Cùm bini & bini sumuntur; primus erit Dux,
Alter erit Comes; & quarto sic tertius est Dux,
Estque Comes quartus; sic sextus sub duce quinto:
Semper eruntque Duces primi, Comites que secundi.

Dux, Comes; Dux, Comes; Dux, Comes; &c.
Ut 2 ad 3, sic 4 ad 6, & 8 ad 12 &c.

Si Dux æqualis Comiti, Ratio æqua vocatur;
Si major, ratio Excessûs; si sit minor illo,
Dicetur ratio Defectûs; unica primæ
Est species; sub quintuplici genere ista vel illa
Defectûs sive Excessûs species habet infinitas.

1 ad 1 ratio æqua. 2 ad 1 ratio Excessûs: 1 ad 2, defectus.

Si tres sint Rationales, primus rationem
Dicetur circa ternum duplicare secundi;
Si quatuor, circa quartum triplicare secundi,
Sicque uno plus, cùm proportio tenderit ultrà.
Hæc de continua ratione intellige tantùm.
Hîc Ratio duplicata, est illam bis positam esse,
Et Ratio triplicata hîc est, positam esse ter illam

Ut 8, 4, 2. | 8 ad 2 ratio duplicata.
16, 8, 4, 2. | 16 ad 2 ratio triplicata.

Cùm verò primi multiplex, alterius plus
Multiplicem superat, quàm terni non superabit
Multiplicem quarti; tunc primus ad alterum habebit

Majorem, quàm tertius ad quartum rationem;
Diceturque illinc majorem, hinc esse minorem.

Ut 6, 2; 7, 4. Si sumatur duplum antecedentium & quadruplum consequentium, erit major ratio 12 ad 8 quàm 14 ad 16
12, 8, 14, 16.

Alterna est ratio, cum permutando, Duci Dux
Et Comiti Comes, in quatuor numeris referuntur.

Ut quia 9 ad 3, ut 6 ad 2;
erit alternando 9 ad 6, & 3 ad 2

Inversa est, dum Dux Comiti sedem, ille duci dat.

Ut quia 9 ad 3, ita 6 ad 2:
erit Invertendo ut 3 ad 9, ita 2 ad 6.

Composita est Ratio, cum juncti Duxque Comesque
Assumuntur, & ad solum Comitem referuntur.

Ut quia 9 ad 3, ita 6 ad 2:
erit Componendo ut 12 ad 3, ita 8 ad 2.

At Ducis ad Comitem distantia pro Duce sumpta
Et collata ipsi Comiti, Divisio dicta est.

Ut quia 9 ad 3, ita 6 ad 2.
erit Dividendo ut 6 ad 3, ita 4 ad 2

Et Ducis ad Comitem distantia, pro Comite ipso
Assumpta, & collata Duci, Conversio dicta est

Ut quia 9 ad 3, ita 6 ad 2
erit Convertendo ut 9 ad 6, ita 6 ad 4

Dicitur Ex æquo Proportio, cùm positis tot
Hinc illinc numeris qui sint ratione in eadem;
Binique & bini deinde hinc sumantur & illinc
Obmissis mediis, ut primus & ultimus illi,
Sic quoque erunt exæquo primus & ultimus isti.

Ex. 12, 6, 3 & 8, 4, 2.
Ut 12 ad 6, sic 8 ad 4: & ut 6 ad 3, sic 4 ad 2.
erit exæquo ut 12 ad 3, sic 8 ad 2.

Hæc sic disposita, Ordinis est Proportio dicta.
Perturbata autem est Proportio, cum tribus illinc,
Hincque tribus positis numeris ratione in eadem,
Perturbatur ita Ordinis hic Proportio eorum;
Primus cum medio hinc, mediusque ac ultimus illinc;
Hinc mediusque ac ultimus, illinc primus eamdem
Cum medio servant interfese rationem.

Ut, hinc 18, 12, 4; illinc 27, 9, 6.

Ex æquo perturbata ut 18 ad 12, ſic 9 ad 6
Et ſicut 12 ad 4, ſic 27 ad 9.

Schema Proportionum.

Quia ut eſt	9 ad 3,	ita 6 ad 2
erit		
Permutando	9 ad 6,	ita 3 ad 2
Invertendo	3 ad 9,	ita 2 ad 6
Componendo	12 ad 3,	ita 8 ad 2
Dividendo	6 ad 3,	ita 4 ad 2
Convertendo	9 ad 6,	ita 6 ad 4

Ex æquo ordinata 12, 6, 3 & 8, 4, 2
Ut 12 ad 3 ſic 8 ad 2

Ex æquo Perturbata 18, 12, 4, & 27, 9, 6
Ordinata Ut 18 ad 4 ſic 27 ad 6
Perturbata Ut 18 ad 12 ſic 9 ad 6
& ſicut 12 ad 4, ſic 27 ad 9.

CAPUT III.

De habitudine & potentia unius Numeri ad alios.

EST quivis Numerus poſitorum utrinque duorum
Dimidium, ſi ſummam utrique addantur in unam

Ut 5 eſt dimidium 10, quem faciunt juncti 6 & 4; 7 & 3, 8 & 2; 9 & 1, à quibus 5 æquidiſtat

Sphæricus eſt Numerus qui ſemper deſinit in ſe
Dum ſe multiplicat; quales quinarius & ſex.

Sic 5, 25, 125, 625, 3125, 15625 &c. | ſic 6, 36, 216, 1296, 7776 &c.

Impare quin quovis ductus quinarius, in ſe
Deſinit; at pare ſi ducas, eſt ultima cifra.

Ut ter 5, 15, quinquies 5, 25; ſepties 5, 35 &c. | bis 5, 10; quater, 20; ſexies, 30, &c.

Si per quinque velis numerum quem multiplicare,
Accipe dimidium paris, illique addito cifram;

At minus accipe dimidium imparis, addito quinque.

Ut 5 per 2, 10: per 4, 20; per 6, 30; per 1000, 5000, &c.

Ut 5 per 3, 15; per 5, 25; per 7, 35; per 11, 55; per 2005, 10025, &c.

Aliter.

Primo scribe loco numerum quem denotat ordo
Quem tenet in paribus vel in imparibus numerus qui
Multiplicat, post hunc vel cifram aut quinque notato.
Primus par, duo; primusque est ternarius impar

Ut quia 2 est 1° par: 4, 2°: 6, 3°. &c. ideo si 5 per 2 multiplices, scribe 1, & deinde cifram: per 4, scribe 2 & deinde cifram, &c. Et quia 3 est primus impar: 5, 2°: 7, 3° &c. ideo si multiplices 5 per 3, scribe 1 & deinde 5; per 5, scribe 2 & deinde 5, per 7, scribe 3 & deinde 5.

Utque scias quonam Numerus sit in ordine quovis
Imparium aut parium; minus imparis accipias hinc,
Illinc dimidium paris: addas quinque cifranve.

Sic 17 est 8° impar, & 28, 14° par.

Ergo 17 per 5 dat 85 & 28 per 5 dat 140.

Est alia ratione Novem spectabilis, ut quo
Sit ductus numero, in sese additione revertat.

ex bis 9, 18, id est addendo, 9 | ter 9, 27, id est addendo, 9 | quater, 36, 9 | quinquies, 45, 9 | sexies, 54, 9 | septies, 63, 9 | octies, 72, 9 | novies, 81, 9 | decies, 90 | undecies, 99 | duodecies, 108, id est 9 | 13, 117, 9 | 14. 126 | 15. 135 | 16. 144 | 17. 153 | 162 | 171 | 180 | 189 | 198 | 207 | 216 | 225 | 234 | 243 | &c.

Quantoscumque pares addas, Collectio fit par.

Ut ex 2, 4, 6, 10, 16, additis fit 58.

Imparium si par series, collectio fit par.

Ut ex 1, 3, 5, 7, 11, 13 fit 38

Imparium si impar, impar collectio fiet.

Ut ex 1, 3, 5, 7, 9 fit 23

Si par de pare tollatur, quod fit reliquum, est par.

Si 4 ex 10, manet 6.

Si par sublatus sit de impare, fit reliquum impar.

Si 4 ex 11, manet 7

Impar de pare si tollatur, fit reliquum impar.

Si 5 ex 12, manet 7

Ex pare multiplicante parem, productus erit par.

ex 4 in 6 fit 24.

Ex pare

Ex pare multiplicante ſeipſo, factus erit par.
ex 4 in 4 fit 16
Impare multiplicante parem, productus erit par.
ex 3 in 6 fit 18
Impare ſi impar multiplicetur, & hinc venit impar.
ex 3 in 5 fit 15
Impare multiplicante ſeipſo, educitur impar.
ex 5 in 5 fit 25
Impare ſi par, menſurabitur & medium ejus.
Ut ſi 3 menſurat 12, & 6 metietur
Impar ſi ad quemdam primus, duplo eſt quoque primus.
Si 7 ad 8, & ad 16 primus erit
Quos duplat binarius, eſt quivis pariter par.
2, 4, 8, 16, 32 &c.
Eſt Impar pariter tantùm, cui dimidium impar.
Ut 30 cujus dimidium 15.
Par, quem nec duplat binarius, & medium cui
Non impar, pariter par & pariter ſimul impar.
Ut 20 qui non à binario & cujus dimidium 10.
Si ſe multiplicet Cubus, hinc veniet Cubus alter.
Ut, ex 8 in 8, fit 64
Si Cubus in Cubum, erit Cubus & productus ab illis.
Ex 8 in 27, fit 216
Sit Cubus in quemvis ductus, veniat Cubus inde,
Ille erat antè Cubus fuerat qui multiplicatus.
Ex 27 in 8, fit 216; ergo 8 erat Cubus
Si ſe multiplicans faciat Cubum, erat Cubus ille.
Ex 8 in 8, fit Cubus 64, ergo 8 erat Cubus
In quemdam ſi Compoſitus, Solidus venit inde.
Ex 6 in 5, fit 30.
Alterius Numeri, Numerus partes erit aut pars.
Sic 3 ad 6, eſt pars; 3 ad 7, partes.
Primi inter ſe ſunt minimi ejuſdem rationis.
Ut 3 & 4
Qui primorum uni metrum eſt, haud fiet alius.
Ut 6 & 7, ſi 3 metiatur 6, erit primus ad 7.
Quos numeros non menſurat, fit primus ad illos.
Ut 5 ad 8, ad 9, ad 11 &c.

CAPUT IV.

De habitudine & potentia duorum Numerorum ad alios.

Ex binorum hoc aut alio ductu, venit idem.
Ut ex 3 in 4, vel ex 4 in 3, venit idem 12.
Si bini ad quendam primi, est & factus ab illis.
Ut 2 & 3, ad 5, erit etiam 6, qui fit ex 2 in 3.
Ex binis primis, unus si multiplicetur
In se, primus ad alterum erit non multiplicatum.
Ut 3 & 4, ex 3 in se fit 9 qui primus ad 4.
Si bini ad binos primi; & productus ab illis
Primus erit numero, fuerit qui factus ab istis.
Ut 2 & 4 primi ad 3 & 5, erit & 8 ad 15.
Si bini se multiplicent, & factus ab illis
Primo alio mensuretur, mensura erit iste
Unius ex binis qui sese multiplicarunt.
Is primus poterit fieri mensura duorum.
Ut ex 4 in 6 fit 24 qui mensuratur à 3 qui non est primus ad 6.
ex 6 in 9 fit 54 quem mensurat 3, ac etiam 6 & 9.
Si bini fuerint metrum majoris alius,
Et minimus, quem mensurant, mensura erit hujus.
Ut quia 2 & 3 metiuntur 12; 6 quem 2 & 3 mensurant etiam metietur 12.
Si unus multiplicet binos, hinc facti & eamdem
Servabunt rationem, ac ipsi multiplicati.
Ut ex 2 in 3 & in 4 fit 6 & 8, qui ut 3 & 4
Si unum multiplicent bini, hinc producti & eamdem
Servabunt rationem, ac ipsi multiplicantes.
Ut ex 4 & 6, in 5, fit 20 & 30, qui ut 4 & 6.
Si bini Plani similes se multiplicarint,
Tunc quadratus erit numerus productus ab illis.
Ut ex 6 in 24 fit 144 quadratus.



CAPUT V.

De habitudine & potentia trium, quatuor & quotvis numerorum, ad alios & inter se.

SI Tres Continui & minimi ratione in eadem;
Ex binis horum Compostus, primus ad istum.

	A B C	AB C	BC A	AC B
Ut	9, 12, 16	21 ad 16 primus est	28 ad 9	& 25 ad 12.

Qui minimi sunt in ratione, alios in eadem
Sic æqué numerant; minor in ratione, minorem
Continet in se, quot majorem major habebit.

Ut 3 & 4, sic æqué mensurant 6 & 8; ut 3 in 6, bis; & 4 in 8, bis.

Continuis quotvis Numeris ratione in eadem;
Quando Extremi ad se primi, hi minimi in ratione.

Ut 4, 6, 9 | quia 4 & 9 ad se primi, ideo 4, 6, 9, minimi in ratione,
sic 8, 12, 18, 27 | quia 8 & 27 primi, ideo quatuor hi minimi.

Continuis quotvis numeris ratione in eadem;
Extremi si primus, erit mensura secundi:
Nullius at primus, nisi sit mensura secundi.

Ut 3, 6, 12, 24 | quia 3 est mensura 24, est & mensura, 6.
At 16, 24, 36, 54, 81 | quia 16 non est mensura 24, ideo nullorum.

Si quotvis sint Continui à monade incipientes;
Qui minor est, majorem alium per eum numerabit
Qui distans ab eo est, quantùm minor ipse is ab uno.

Ut 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 | ex 9 in 27, fit 243 qui tantùm distat á 27, quantùm 9 ab 1.

Si quotvis sint Continui ratione in eadem,
Primoque æqualis retrahatur deque secundo
Et de postremo; reliquum tunc quale secundi
Ad primum, reliquum & postremi erit omnibus ante
Se simul unitis ac sumptis unius instar.

Ut 8, 12, 18, 27 | si 8 retrahatur ex 12 fit reliquum 4; & si 8 de 27, fit reliquum 19 | Erit autem 4 ad 8, ut 19 ad 38 qui ex 8, 12, & 18.

Ex quatuor numeris, si eadem pars primus & alter,
Tertius & quartus; junctique Duces, Comitesque,
Invicem erunt eadem pars, quàm priùs unus ad unum.

A B C D AC BD
Ut 6 ad 12, ita 4 ad 8: Erit 10 ad 20

Ex quatuor numeris si partes primus & alter,
Tertius & quartus; junctique Duces, Comitesque
Invicem erunt partes eædem ac priùs unus ad unum.

A B C D AC BD
Ut 4 ad 6, ita 2 ad 3: Sic erit 6 ad 9

Si quotvis numeri æqualem servent rationem;
Quales sunt Ducibus Comites, sic omnibus omnes.

A B C D E F ACE BDF
Ut 6 ad 9, & 4 ad 6 & 2 ad 3: Sic 12 ad 18.

Ut quatuor fuerint ad se invicem, eruntque vicissim.

A B C D A C B D
Ut 6 ad 9 ita 8 ad 12: vicissim ut 6 ad 8, ita 9 ad 12.

Si quot sunt numeri hinc, totidem sumantur & illinc
Qui bini & bini fuerint ratione in eadem,
Qui fuerint iis æqui, & erunt ratione in eadem.

A B C D E F
Ut 9, 6, 3; & 6, 4, 2
A B D E B C E
Sicut 9 ad 6; sic 6 ad 4: Et sicut 6 ad 3, sic 4 ad 2.
A C D F
Et ut 9 ad 3; sic 6 ad 2

Tunc quatuor numeri, ad se sunt ratione in eadem,
Cùm idem fit primo in quartum, in ternumque secundo:
Vel, cùm dant Extremi in se, quantum Medij in se.

A B C D A D E B C E
Ut 6 ad 4, ita 3 ad 2; quia ex 6 in 2 fit 12; & ex 4 in 3 fit 12.

Tres etiam numeri si sint ratione in eadem,
Tot faciunt in se Extremi, Medius quot & in se.

A B C A C D B D
Ut 9, 6, 4: Ex 9 in 4 fit 36; & ex 6 in se fit 36.

CAPUT VI.

De Mediis Proportionalibus & habitudine Numerorum Figuratorum.

QUot Medij hos inter fuerint ratione in eadem,
Tot Medij intra alios venient ratione in eadem.

Hoc de Continua ratione intellige tantùm.

Ut 3, 9, 27, 81 | quia inter 3 & 81 ſunt duo medij, 9 & 27, totidem venient intra 2 & 54 qui ſunt in eadem ratione quam 3 & 81. ſcilicet 2, 6, 18, 54 |.

Si bini numeri inter ſe primi, medijque
Inter eos deinceps veniant ratione in eadem;
Quot Medij inter eos, tot & inter utrumque
Ac Monadem venient ſe in ea ratione ſequentes

Continuâ, quam { dat Radix rationis utrius. / dant minimi utrius rationis. / maximi habent rationis utrius. }

Ut 8, 12, 18, 27 | quia inter 8 & 27 primos inter ſe veniunt duo Medij 12 & 18, ita ab unitate ad 8 venient duo medij continué proportionales in dupla ratione nempé 1, 2, 4, 8. & totidem ab unitate ad 27 in tripla ratione, nempé 1, 3, 9, 27. quia radix utrius rationis ſcilicet duplæ & triplæ, ſunt 2 & 3: vel quia minimi primæ rationis 8 ad 12 ſunt 2 & 3.

Vel quia 2 & 3 ſunt maximi in dupla & tripla ratione.

Inter Quadratos binos medius cadit unus:
Quadratique ad quadratum Ratio duplicata
Quæ lateris circa latus. At triplicata Cuborum;
Atque duo inter eos Rationales Medij ſunt.

1° quad.	med.	2° quad	lat° 1. q.	lat 2. q.	1 ratio	2. ratio	
Ut, 4,	6,	9	2,	3,	4 ad 6;	6 ad 9.	ut 2 ad 3.

	lat° 1. Cub.	lat° 2. Cub.	1. ratio	2. ratio	3. ra	
8, 12, 18, 27	2,	3,	8 ad 12;	12 ad 18;	18 ad 27.	ut 2 ad 3.

Ad binos ſimiles Planos Medius venit unus;
Et duplicat Ratio ad laterum ſimilem rationem.

1. Plan°	Medius	2° Plan°	Platera 1. plan.	latere 2 plani.	
Ut 12,	18,	27	6, 2;	9, 3	ut 6 ad 9, vel 2 ad 3.

1. ratio — 2. ratio
Sic 12 ad 18. — 18 ad 27.

Ad binos ſimiles Solidos bini medij adſunt;
Et triplicat ratio ad laterum ſimilem rationem.

1° Solidus.	medij,	2° Solidus	latera 1. ſol.	latera 2. Solidi	
30,	60, 120,	240	2, 3, 5.	4, 6, 10	ut 2 ad 4, 3 ad 6, 5, ad 10.

1. ratio — 2. ratio — 3. ratio
Sic 30 ad 60, — 60 ad 120, — 120 ad 240

Quadratus numerus cùm quadratum numerabit;
Tunc latus unius, latus alterius numerabit.
Cùm latus unius, latus alterius numerabit
Quadrati, quadratum & quadratus numerabit.

1° quad.	2° quad.	lat° 1. q.	lat° 2. q.	
4	36	2	6	4 metitur 36; & 2, 6.

Sicque Cubos latera ipſa, ac illa Cubi numerabunt.

1° Cubus.	2° Cub.	lat° 1. Cubi.	lat° 2. Cub.	
8	216	2,	6	8 metietur 216; & 2, 6.

Cùm Numeri tres continui ratione in eadem;
Si primus Quadratus, erit ternuſque quadratus.

Ut 4, 6, 9 | quia 4 quadratus & 9 quad.

Cùm quatuor ſunt continui ratione in eadem;
Si primus Cubus eſt, erit & quartus Cubus ipſe.

Ut 8, 12, 18, 27 | quia 8 Cubus eſt, erit Cubus 27.

Si bini numeri ſint in ratione Quadrati
Ad Quadratum, & ſit quadratus primus; & alter
Haud aliter Quadratus erit. Cubus hæc ſibi ſumit.

Quia 16 ad 36, ut 4 ad 9 qui ſunt quadrati; ergo 16 & 36 erunt quadrati.
Et quia 64 ad 216, ut 8 ad 27 qui ſunt Cubi | ergo 64 & 216 erunt Cubi.

Si quotvis ſint continui à monade incipientes;
Tertius eſt quadratus, & uno obmiſſo erit omnis:
Quartus erit Cubus, obmiſſis omneſque duobus:
Septimus eſt Quadratocubus, poſt quinque, ſequentes.

Ut 1, 3, 9 (q), 27 (C), 81 (q), 243, 729 (q, C, qc), 2187, 6561 (q), 19683 (C) &c.

Si quotvis ſint continui à monade incipientes;
Poſt monadem ſi quadratus, ſunt quique ſequentes:
Si Cubus eſt, Cubi erunt etiam quicumque ſequentur.

Ut 1, 4 (Quad.), 16, 64, 256, 1024 &c. quia 4 quadratus, ſunt & reliqui.
Ut 1, 8 (Cub.), 64, 512, 4096, 32768 &c. quia 8 Cubus, erunt & reliqui.

CAPUT VII.

De Continuatione Proportionum & de Numeri Perfecti inventione.

QUantoſcumque dabis Primos, potero addere ſemper,
Inter ſe ſed nullam ſervantes rationem.

Ut, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 &c.

Ad binos Primos non quibit Tertius addi
Qui præcedentum rationem ſervet eamdem;

Integer isque sit; Antiquis nam Fractio nulla.

Ad 3 & 4 non datur tertius in eadem ratione, quia primi sunt.

Si quotvis sint continui ratione in eadem,
Et sint primi Extremi, alius non additur ultrà.

Ut 4, 6, 9 | quia 4 & 9 primi, ideò nullus addi potest.
Sic 8, 12, 18, 27 | quia 8 & 27 primi, ideo nullus addi potest.

Ad binos positos an possit Tertius addi,
Qui binis sit continuus ratione in eadem?
(Integer isque sit; Antiquis nam Fractio nulla)
Majorem quadra; productum divide primo;
Si veniat quotiens, poterit sic tertius addi:
At si non veniat, non quibit Tertius addi.

Ut 4, 6. | ex 6 in se fit 36 qui divisus per 4, dat in quotiente (9 pro-tertio.
At si ad 6 & 9 vis addere tertium; ex 9 in se fit 81 qui non potest dividi integré per 6.

Ad Tres jam positos an possis addere quartum,
Qui rationem habeat cum Terno, ut primus & alter?
Duc medium in ternum; productum divide primo;
Si quotiens veniat, poteris sic addere quartum.
At si non veniat, non possibile addere quartum.

Ut 3, 6, 5 | ex 6 in 5 fit 30, qui divisus per 3 dat 10 | ut 3 ad 6, sic 5 ad 10.
At ad 7, 8, 9, non poteris addere quartum: quia ex 8 in 9 fit 72, qui non potest dividi integré per 7.

Continuos quotvis numeros ratione in eadem,
Si ducas in se; Factos iterumque per illos;
Continui semper venient ratione in eadem.
Aut si per quoscumque alios hi multiplicentur,
Productique iterum per eosdem multiplicentur;
Semper Continui venient ratione in eadem.
Hinc orta est praxis Libro tradenda sequenti.

	A B C	D E F	G H I	K L M
Ut si	2, 4, 8	4, 16, 64	8, 64, 512	16, 256, 409
	per 2, 4, 8	per 2, 4, 8	per 2, 4, 8,	venient semper in eadem ratione in quacumque classe.

	A B C	D E F	G H I	K L M
Aut si	2, 4, 8	6, 12, 24,	18, 36, 72	54, 108, 216,
	per 3. & iterum per 3 & per 3.			

PERFECTUM Numerum hac methodo securus habebis.
Si quos dupla facit deinceps Progressio, ab uno
Incipiens, sumas; donec juncti simul omnes

Componant numerum Primum; ille ex omnibus unus,
Per præcedentem auctus, Perfectum inde creabit,
Tàm rarum, ut dena, & centena, & millia, dena
Millia, quæque intra se, unum producere possint.

Ex. dupla A B C D E F G H I K
progressio 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512
A B

Ex 1 & 2 fit 3, primus numerus, qui per præcedentem 2 multiplicatus, producit 6 Num. intra decem Perfectum.

Ex 1, 2, 4 fit 7, qui per 4 facit 28 Num. Perf. intra 100. Ex 1, 2, 4, 8 fit 15 qui est compositus, ideò nihil.

ABCDE ABCDEFG
Ex 31 per 16, fit 496. Ex 127 per 64 fit 8128. &c.

Aliter.

Dupli progressûs Numeros disponito binos
Et binos; de majori monadem aufer; in illum
Duc minimum, veniet Perfectus in ordine quovis.

4, 8 | 16 32 | 64 128 | &c.
4 in 7, 28 | 16 in 31, 496 | &c.

CAPUT VIII.

De Inventione Dividuorum minimorum seu partium Incompositarum cujusvis Numeri, ac Dividuorum Compositorum; sive omnium Divisorum tàm Compositorum quàm incompositorum.

HOc nomen, Partes, non sume, ut fecimus ante;
Innuit hîc, partem, aut partes, discrimine nullo:
Quin, non partium erit sed significatio partis,
Ut pote quæ repetita suum exactè numerum æquat.
Cujusvis Numeri partes sic invenientur
Dividuæ minimæ, quas tantùm dividit unum:
Propositi numeri summa, aut par, aut erit impar;
Si par est, tunc divisor binarius esto;
Si quotiens est par, iterum binarius esto
Divisor minimus: si summa impar, quotiensve,
Divide per tria, vel per quinque, aliudve per impar,
Dum veniat quotiens sine fractis; divide semper,
Dum quotiens veniat qui partiri haud queat ultrà.

Ac-

Ac cunctos Divisores vice quaque reserva,
Et tandem cum illis indivisum quotientem.
Hos omnes Divisores ex ordine pone;
Multiplica interse cum indiviso quotiente:
Propositus primò numerus sic restituetur,
Oblatique incompositæ partes numeri hæ sunt.

Ut si sit datus Numerus 462. quia par
Divide per 2 & venit 231. reserva 2,
Deinde divide 231 per 3 venit 77, reserva 3,
Et 77 per 7 quia non potes per 3 neque per 5 venit 11; reserva 7;
Et quia 11 est numerus primus, ideò Individuus quotiens 11:
Sicque pro divisoribus numeri 462, habebis 2, 3, 7, 11, quos
si vicissimi in se multiplicaveris, restituetur numerus 462.

Ex primis his, Compositæ sic invenientur.
Hos primos divisores ex ordine pone,
Ac ipsum quotientem indivisum: Incipe ab isto;
Ducatur quotiens in eum qui proximus illi est:
In quotientem indivisum penultimus actus
Compositum numerum facit; hunc ex ordine pone
Post factorem utrumque suum; dein tertius istos
Omnes multiplicet quotiens; ac deinde sequentes,
Quotquot erunt, jam factos ordine multiplicabunt;
Et sic Compositas partes, Incompositasque,
Illis adjectâ monade ac numero dato, habebis.

Erant divisores dati numeri 462; 2, 3, 7, 11,
Incipe ab 11, & multiplica per proximum 7; & fit, 7, 11, 77. 1° ordo.
Dein tertius quotiens nempe 3, hos tres multiplica; & fit, 3, 21, 33, 231. 2° ordo
Tertio, multiplica primum & secundum ordinem per sequentem 2,
& ex primo ordine per 2 multiplicato fit 2, 14, 22, 154. 3° ordo
ex secundo ordine per 2 multiplicato fit, 6, 42, 66, 462, 4° ordo

Sicque omnes divisores tàm Compositi quàm Incompositi, dati numeri 462, sunt, addita unitate, numero sedecim, quos ordine disposito hîc habes:

1, 2, 3, 6, 7, 11, 14, 21, 22, 33, 42, 66, 77, 154, 231, 462.

Sic Divisores numeri Platonici habebis;

Cujus ad Exemplum similes in quirere disces.

Numerus Platonis, in lib. 5° legum circa medium

5040

Divisores minimi seu Incompositi		
A 2,	(2520	
B 2,	(1260	
C 2,	(630	
D 2,	(315	
E 3,	(105	
F 3,	(35	
G 5,	(7 H	

H 7 ultimus quotiens indivisus.

Divisores Compositi per divisores minimos inventi.

G in H
5, 7, 35 1° ordo

F
3, 15, 21 105, in 1. ordinem, 2° ordo

E
3, 9, 45, 63, 315, in 2 ordinem, 3° ordo

D
2 10, 14, 70, in 1. ordinem 4° ordo
6 30, 42, 210 in 2. ordinem, 5° ordo
18, 90, 126, 630 in 3. ordine 6° ordo

C
2, 4, 20, 28, 140, in 4 ordinem 7° ordo
12, 60, 84, 420 in 5. ordi. 8° ordo
36, 180, 252, 1260 in 6. ord. 9° ordo

B
2, 8, 40, 56, 280, in 7. ordinem, 10° ordo
24, 120, 168, 840, in 8. ord. 11° ordo
72, 360, 504, 2520 in 9. ord. 12° ordo

A
2, 16, 80, 112, 560 in 10. ordinem, 13° ordo
48, 240, 236, 1680 in 11. ordinem, 14° ordo
144, 720, 1008, 5040, in 12. ordi. ultimus ordo

Partes sibi respondentes.

1	5040
2	2520
3	1680
4	1260
5	1008
6	840
7	720
8	630
9	560
10	540
12	420
14	360
15	336
16	315
18	280
20	252
21	240
24	210
28	180
30	168
35	144
36	140
40	126
42	120
45	112
48	105
56	90
60	84
63	80
70 — X —	72
72	70
80	63
84 &c.	60 &c.

Sicque fiunt divisores sexaginta.

Sic omnes diviſores ab unitate ad ipſum numerum 5040; ſunt ſexaginta, hoc ordine.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 305, 336, 360, 420, 540, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040.

CAPUT XI.

De Cribro Eratoſthenis; ſeu de procreatione numerorum Imparium tàm Compoſitorum quàm primorum in ſe, aut ad alios.

UT tibi ſit notum, quos & per quos numerabit
Unuſquiſque Impar numeros, hæc norma tenenda,
Quæ tibi Cribrum Eratoſthenis haud ingrata miniſtrat.
Eſt tantùm hîc de quovis Impare quæſtiò nobis:
Omnis enim par (ſi binarius excipiatur)
Compoſitus. Tres in ſpecies diſtinguitur Impar:
In ſe Primus, & erga alios, eſt Compoſituſque.
Eſt in ſe Primus, quem tantùm dividit unum.
Ut 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, &c.
Compoſitus, qui per præcedentem numeratur
Ut 9 qui per 3; 15 qui per 3 & 5; 21 qui per 3 & 7, &c.
Et ſunt in ſe Compoſiti, aſt reſpectu aliorum
Primi, qui quamvis alio quodam numerentur,
Erga alios tamen his metrum commune negatur.
Ut 9 ad 25, qui in ſe compoſiti, ad invicem ſunt primi.
Tres ergo has ſpecies in Cribro hæc Regula monſtrat.
Incipientibus à ternario in infinitum
Imparibus; ſic unuſquiſque ſuum numerabit.
Quiſque locum ſedis bis tranſiliet vice quaque,
Ac occurrentes, per primum, perque ſecundum,
Perque alios deinceps, numeros quo ſuis numerabit.

Exemplum.

Sic 3, qui eſt in loco primo, ſeu primus impar, tranſgreſſobis ſuo ſedis loco, ſcilicet tranſmiſſis 5 & 7, numerabis 9, per primum, nempe

per seipsum, deinde prætermissis aliis duobus scilicet 11 & 13, numerabit 15 per secundum nempé 5 : ac aliis duobus transmissis scilicet 17 & 19 numerabit 21 per 7, & ita in infinitum.

Sic etiam 5 qui est in secundo loco imparium, transmisso bis suæ sedis loco, id est quater, nempe 7, 9, 11, 13, numerabit 15 per primum 3; ac deinde 25 per secundum, nempé seipsum 5; ac 35 per tertium 7; 45 per quartum 9 &c.

Sic 7 cum sit in tertio loco, transmissis sex numeris, numerabit 21 per 3; 35 per 5; 49 per 7.

Sic quartus impar 9, prætermittet octo sedes & numerabit 27 per 3 : & quintus 11 transiliet decem sedes & numerabit 33 per 3. &c.

Sic numeri, quos transiliunt, Incompositi sunt:
Qui verò occurrunt, bis transmisso ordine sedis,
Compositi : erga alios primi dicentur, & in se
Compositi, queis communis mensura negatur.
Ex sic disposito hæc poteris cognoscere Cribro.

Cribrum Eratosthenis.

1. Impar.	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	&c.
2	5		15	25		35		45	55		65		&c.
3	7			21		35		49			63		&c.
4		9			27			45			63		&c.
5		11				33			55				&c.
6		13					39				65		&c.
7			15					45					&c.
8			17						51				&c.
9			19							57			&c.
10				21							63		&c.
11				23								69	&c.
&c.													

CAPUT X.

Universæ Propositiones 5. Elem. Euclidis in compendium & in meliorem ordinem redactæ, ac Numeris, loco magnitudinum, applicatæ.

5a EUCLIDIS.

EX binis numeris qui sint aliqua in ratione
Si tollas binos qui sint ratione in eadem;

Qui bini remanent, & erunt ratione in eadem.

Ut ex 12 & 6, sublatis 8 & 4, remanent 4 & 2, in eadem ratione ac 12 & 6, & 8 & 4.

6ª & 19ª.

Si bini sint multiplices binorum aliorum;
Ex majoribus, horum æqué quoque multiplices si
Sustuleris; reliquum, his simile, aut multiplum erit æqué.

Ut si ex 12 & 18, æqué multiplicibus 2 & 3, sustuleris 4 & 6 remanent 8 & 12, æqué multiplices ad 2 & 3.

Vel si sustuleris ex iisdem 12 & 18, 10 & 15, remanent 2 & 3, similes 2 & 3.

7ª. & 9ª.

A binis æquis si tantùm differat unus,
Hujus ad alterutrum semper ratio una eademque est.

A B C — C A B

Ut 4, 4 & 2, eadem ratio est 2 ad 4 quam ad 4.

8ª. & 10ª.

Si tres decrescant numeri in quavis ratione,
Majorem ad minimum rationem major habebit
Quàm ad medium, & quàm sit medij ad minimum; Ipsaque major
Est medij ad minimum, ad medium quam major habebat.

Ut 6, 4, 2. major est ratio 6 ad 2 quam 6 ad 4 & 4 ad 2:
Ac 4 ad 2 quam 6 ad 4.

21ª. & 23ª.

Ad tres si confers totidem ratione in eadem
Binos & binos, sed turbato ordine; qualis
Primus erit terno, talis quartus quoque sexto:
Et talis quintus sexto primusque secundo:
Qualis & alter erit terno, quartus quoque sexto.

18 12 4 | sicut 18 ad 4 sic 27 ad 6.
Ut 27, 9, 6 | ut 18 ad 12 sic 9 ad 6.
ut 12 ad 4 sic 27 ad 9.

1ª. 12ª. 17ª. 18ª.

In quavis ratione, Duces juncti, Comitesque
Juncti, sunt ratione in eadem, quam antea quivis
Dux proprium ad Comitem, adque ducem Comes ipse tenebat.
Dux Comiti at junctus rationem servat eamdem
Quam priùs ad Comitem servat Comes, adque Ducem dux.

A B C D | AC BD A B C D
Ut 12, 8; 9, 6. | 21 ad 14, ut 12 ad 8, & 9 ad 6.

AB CD A C B D
At 20 ad 15 ut 12 ad 9 & 8 ad 6.

25ª.

Si quatuor bini & bini ratione in eadem;
Major conjunctus minimo summam aut numerum dat
Majorem quàm sit mediorum summa duorum.

A B C D AD BC
Ut 12, 6; 8, 4. | summa 16 est major summâ 14.

11ª.

In sex, si bini & bini æqui, erit & ratio æqua.
Ut 4, 2; 4, 2; 4, 2.

2ª. & 24ª.

In sex, si quatuor primi ratione in eadem
Et sextus sit quarto ut erit quintusque secundo;
Conjuctis primo quintoque secundus eamdem,
Quam terno & sexto conjunctis quartus habebit.

A B C D E F E B F D AE B
Ut 6, 3; 4, 2: 9, 6 | si 9 ad 3 ut 6 ad 2, erit 15 ad 3
CF D
sicut 10 ad 2.

3ª. & 13ª.

In sex, si primi quatuor ratione in eadem;
Et quintus cum aliquo primæ rationis eamdem
Quam sextus cum aliquo alterius rationis habebit;
Et quintus, sextus quoque eamdem cum altero habebunt:
Primaque si major ternâ aut minor, altera talis.

A B C D E F E A F C E B F D
Ut 4, 2; 6, 3, 8, 12 | ut 8 ad 4 & 12 ad 6, sic 8 ad 2 & 12 ad 3.
A B E F
Et sicut prima ratio 4 ad 2 est major tertiâ 8 ad 12, sic major erit
C D E F
secunda 6 ad 3 quàm 8 ad 12.

4ª.

Ad quatuor ratione in eadem, si totidemque
Sumantur qui, quamquam sint alia in ratione,
Ad primos tamen æqualem servent rationem;
Ut sibi respondent si confers, semper ubique
Æqua manet ratio, stet dummodo debitus ordo.

A B C D | E A F B
Ut 4, 2; 6, 3 | ſicut 8 eſt duplus ad 4, & 6 triplus ad 2:
E F G H | G C
8, 6; 12, 9 | ſic 12 ad 6 duplus, & 9 ad 3 triplus. Ergo quamvis ſint
| in alia ratione ad primos tamen æqué ſervant rationem.

Jam ſi conferas ut ſibi reſpondent, æqua ſemper erit ratio dummodo recté conferas:

A E C G B F D H
Ut 4 ad 8, ſic 6 ad 12 | ut 2 ad 6, ſic 3 ad 9
A C B D E G F H
Ut 4 ad 6, & 2 ad 3, ſic 8 ad 12, & 6 ad 9.

20ª. & 22ª.

Hinc illinc ſi ſint quotvis ratione in eadem,
Qualis erit Primus terno, quartus quoque ſexto

A B C A C D F
Ut 12, 9, 6 | &c. | ſicut 12 ad 6, ita 8 ad 4.
D E F |
8, 6, 4 | &c. |

14ª.

Si quotvis ſint continui ratione in eadem,
Æquales tunc ſunt omnes ad ſe rationes

Vel

Æquali ſe ſe cuncti in ratione ſecuntur.

Ut 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

15ª.

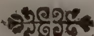
At ſi ſint quotvis in diſcreta ratione
Tunc bini tantùm ſeſe in ratione ſecuntur:
Eſt terno quartus, qualis primoque ſecundus,
Seu ratio æqualis fuerit, majorve minorve.

Ut 6, 3; 4, 2. ſicut 6 ad 3 ſic 4 ad 2. major.
Ut 6, 3; 6, 3. æqualis.
Ut 3, 6, 2, 4, minor.

16ª.

Ac in multiplis, Ducis ad proprium Comitem æqua
Eſt ratio; Ducis adque Ducem; ad Comitem Comitiſque.

Ut 12, 4; 6, 2. | ſicut 12 ad 4; ſic 6 ad 2. tripla ratio.
Et ſicut 12 ad 6, ſic 4 ad 2. dupla.



CAPUT XI.

Principia Analyseos Numerorum.

I. EST quivis Numerus positorum utrinque duorum,
Æquali spatio hinc illinc distantium ab illo,
Dimidium, si summam utrique addantur in unam.

Ut 6, dimidium est 12 quem faciunt 5 & 7, 4 & 8, 3 & 9 &c.

II. Binorum numerorum à se distantia, summæ
Addita, duplum est majoris; subtracta, minoris.

Ut 2 distantia 5 & 7, addita summæ 12, dat 14, duplum 7; subtracta dat 10, duplum 5.

In binis ergo si excessus summaque dentur,
Ignoti quamvis tibi proponantur utrique,
Addendo aut retrahendo excessum, utrique dabuntur.

Sic datâ summâ 100 & excessus 40, additus 40 ad 100 dat 140 duplum majoris 70; subtractus dat 60 duplum minoris 30; ergo 30 & 70 quorum distantia 40, componunt summam 100.

III. In binas partes æquas distantia secta
Binorum, ac una ablata ex majore, minorive
Addita, dimidium summæ utrorumque ministrat.

Ut 4 distantia 6 & 10, in 2 & 2, secta, ac 2 subtractus ex 10 relinquit 8, aut additus ad 6, dat item 8, dimidium summæ 16.

IV. In duo frusta æqua, excessu summaque refectis
Binorum; majorem illinc, duo dimidia addens;
Ast unum ex alio retrahens, hinc alterum habebis.

Ut si summa 100, dimidietur in 50 & 50, & excessus 40 dimidietur in 20 & 20; ac 20 ad 50 addatur, habebitur major 70, si detrahatur, habebitur minor 30.

In binis ergo si excessus summaque dentur
Ignoti quamvis tibi proponantur utrique,
Dimidia addendo aut retrahendo, utrique dabuntur.

Ut in exemplo suprapofito.

V. Binorum si multiplicet distantia summam,
Illorum hinc quadratorum distantia prodit.

Vel

Binorum in summam si sit distantia ducta;

Æquabit

Æquabit quadratorum distantiam eorum.

Ut 2, distantia 5 & 7, ducta in summam 12, dat 24, distantiam quadratorum 5 & 7, nempe 25 & 49.

VI. Si bini se multiplicent, productus eorum,
Cum minimi quadrato in ea ratione manebit,
Ipsi quam bini priùs ad sese invicem habebant,
Seu bini ad libitum sumpti, sive ex alio orti.

Ut si 100 in 20 & 80 dividas, qui in quadrupla proportione & ducas 20 in 80 veniet 1600 qui cum quadrato 20, scilicet 400, est in quadrupla proportione.

VII. Si numerus quicumque in quotvis frusta secetur;
Quadratum illius, quadratis partium & harum
Duplo planorum, qui ex quavis parte vicissim
Ductâ provenient, simul assumptis, erit æquum.

Ut si 9 secetur in 2, 3 & 4; vel tantùm in 4 & 5; aut in 3 & 6; ejus quadratum 81 æquabitur tum quadratis 2, 3 & 4, scilicet 4, 9 & 16, id est 29, tum duplo planorum 2 in 3, 3 in 4 & 2 in 4, scilicet 12, 24 & 16, id est 52, qui cum 29 dant 81:

Vel quadratis 4 & 5 scilicet 16 & 25 id est 41, & duplo plani 4 in 5, id est 40, qui cum 41 dat 81: vel quadratis 3 & 6, scilicet 9 & 36, id est 45, ac duplo plani 3 in 6, scilicet 36 qui cum 45 dat 81.

VIII. Si duo inæquales numeri; distantia ab illis
Ortorum quadratorum, distantiæ eorum
Quadrato, duploque minoris multiplicati
Ipsam per distantiam eorum, plané erit æqua.

Ut si dentur 3 & 5, distantia quadratorum 9 & 25, nempé 16, æquabitur tum quadrato distantiæ eorum 2, nempé 4, tum duplo multiplicationis ipsius distantiæ 2 in minorem numerum, 3, nempé 12, qui cum 4 dat 16.

IX. Si quotvis numerorum excessus, summaque dentur,
Quamvis non dentur numeri: Excessus retrahantur
A summa; reliquo dein per numerum numerorum
Diviso, quotiens dabit ipsorum minimum; ad quem
Excessu proprio facile est adducere quemvis:
Ad primum, excessus debent quicumque referri.

Ut si quis supponatur divisisse quatuor hominibus summam 100 aureorum, dedisse primo incertum numerum, 2°. tres plusquam primo 3 3°. quatuor plusquam secundo; & 4°. tres plusquam tertio, quæraturque quantum singulis dederit. Adde simul excessus 3, 4 id est 7 supra primum, 3, id est 10 supra primum, excessus ergo 20 à 100 subtracti relinquunt 80, qui divisi per 4 numerum nemerorum quatuor ho-

minum, dant pro primo 20, pro ſecundo, 23, pro tertio 27, pro quarto 30, id eſt 100.

X. Si inter eos numerus quis habet duplumve triplumve
Alterius, totidem augebit numerum numerorum.

Ut ſi in ſumma annorum 96 Alexander habeat duos ſuper Epheſtionem; Clytus verò duplum amborum & quatuor inſuper, tunc additis exceſſibus 2 & 4 ſeu 6 ſuper primum, id eſt 8, reliquum 88 dividendum erit per quatuor, quia Clytus duorum tenet locum, habens duplum aliorum, venietque pro primo 22, pro ſecundo 24, pro tertio 50, ſcilicet annos duorum & inſuper 4, qui omnes 96.

XI. Multorum exceſſus cum ſejunguntur ab uno,
Et nulli dantur numeri, ſummæque tacentur;
Ignoti numeri ſummæque hac arte patebunt.
Omnibus in ſummam adductis exceſſibus unam,
Sic ignotorum numerorum collige ſummam.
In tribus, eſt ſumma ignotorum, exceſſibus æqua;
In reliquis exceſſuum erit ſuperantia major:
In quatuor, dupla; tripla, in quinque; in ſexque, quadrupla;
Quintupla, in ſeptem; & ſic deinceps; ſummaque ſemper,
Multiplicis gradibus binis, hæc diſtat ab illa.
Ergo ut ſummæ æquentur utræque, reductio fiet
Quando opus eſt, dicta ut ſuperantia monſtrat;
Dein quemque exceſſum à ſumma retrahendo reducta,
Dimidium reliqui ſummæ eſt incognitus unus;
Exceſſuſque dabit major, vice quaque, minorem,

Ut ſi in quatuor, ubi ſumma exceſſuum eſt dupla incognitorum,
primus, ſecundus, & tertius, excedunt quartum, 40
primus, ſecundus, & quartus, excedunt tertium, 80
primus, tertius, & quartus, excedunt ſecundum, 120
ſecundus, tertius, & quartus, excedunt primum, 160
quantum quiſque habet? ſumma exceſſuum, eſt dupla incognitorum.
400

Ergo Numerorum incognitorum ſumma 200. à qua ſi primus retrahatur exceſſus 40, ſupererit 160 cujus dimidium 80 pro majori numero.
ſi 2°. 80, ſupererit 120 cujus dimidium 60 pro ſequente.
ſi 3°. 120, ſupererit 80 cujus dimidium 40 pro ſequente.
ſi 4°. 160, ſupererit 40 cujus dimidium 20 pro minori numero.
Ergo primus habebit 20, ſecundus 40, tertius 60, quartus 80, unde patent exceſſus.

XII. At quando à reliquis numerus ſejungitur unus
Cum ſibi parte data; & reliqui referuntur ad illum

Ac inter se cum sibi parte data: aufer ab istis
Partem unam; dein quære, quis ablatis numerus sit
Partibus, ex quo pars primi memorata supersit.
Quæsitum dabit hunc numerum tibi Regula Falsi:
Ablatas ab eo partes retrahe; inde petitum.

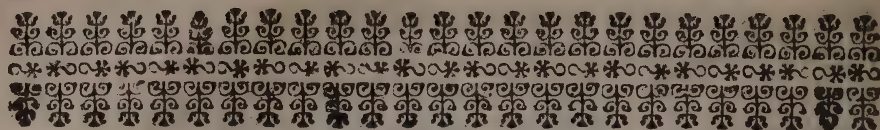
Ut, quidam testamento instituit tres hæredes, dedit Petro 10000. l. vult Jacobum habere dimidium Petri & Joannis; & Joannem tertiam partem Petri & Jacobi; quænam est summa & quæ pars Jacobi & Joannis?

10. A Jacobi & Joannis auferenda est cuique una pars, & sic Jacobus à dimidio ad tertiam partem, Joannes à tertia parte ad quartam veniet; deinde quærendus est numerus per Regulam Falsi libro sequente explicandam ex quo ablatis tertia & quarta partibus superest 10000.

Quæsitus numerus erit 24000, cujus tertia pars pro Jacobo erit 8000, quarta vero pro Joanne 6000. & sic soluta est quæstio, nam Jacobus habet dimidium Petri & Joannis qui 16000; Joannes tertiam partem Petri & Jacobi qui 18000, &c.

Talia multa Libro Decimo evoluenda relinquo.
Plura tibi Clavius, majoraque Billius offert;
Billius Algebricos inter celeberrimus unus.





LIBER QUINTUS.
ARITHMETICA RELATORUM SEU PROPORTIONUM.

CAPUT PRIMUM.

Quid sit Relatio seu Ratio, aut simplex Proportio: quid Proportio propriè dicta & quotuplex.


IC Ratio aut simplex Proportio dicitur esse,
Res ubi confertur cum alia majore, minore,
Aut æquali; & sic, Rerum est habitudo duarum.
Ejusdem generis rerum collatio fiat.

Ut 1 ad 2 | 4 ad 3 | 2 ad 2.

At binas res cum binis qui conferet, inde
Nascetur duplex Ratio, Proportio dicta;

Ut 1 ad 2; sic 2 ad 4, &c. vel, ut 2 ad 4, sic 4 ad 8.

Quæ triplex est: Prima est in distantibus à se
Æquali spatio numeris; & Arithmica dicta:

Ut 1, 2, 3, 4, &c. vel 2, 4, 6, 8, &c. vel 3, 6, 9, 12, &c.

Altera at in quatuor, rationem servat eamdem
Binorum ad binos, & Geometrica dicta:

Ut, sicut 2 ad 4, sic 8 ad 16 | vel, ut 3 ad 4; sic 6 ad 8 | &c.

Tertia, tres inter, talem admittit rationem
Extremorum ad se, qualem distantia eorum
Ad medium; Harmonicorumque est Proportio dicta.

Ut, 3, 4, 6: nam ut 3 ad 6 quæ ratio dupla est: ita 1 ad 2, distantia 3 ad 4, & distantia 4 ad 6.

Sunt aliæ septem, sibi quos hæc ultima sumit,

Quòd, præter numeros, ſpectet diſtantiam eorum.

A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C
Ex. 6, 5, 3	5, 4, 2	6, 4, 1	9, 8, 6	9, 7, 6	7, 6, 4	8, 5, 3
A C diſt.	B C diſt.	A B diſt.	A C diſt.	A C diſt.	B C diſt.	B C diſt.
Ut 6 ad 3, ſic 2 ad 1	4, 2 : 2, 1	6, 4 : 3, 2	9, 6 : 3, 2	9, 6 : 3, 2	6, 4 : 3, 2	5, 3 : 5, 3.

CAPUT II.

De Quinque Generibus Proportionum Geometricarum & earum ſpeciebus.

QUinque Relatorum Genera, Æquali haud memoratâ:
Alterum enim ſuperat quidquam, aut ſuperatur ab illo
Quinque modis: vel parte unâ, vel pluribus; aut hoc
Multoties illud præciſé continet; aut hoc
Multoties & partem habet illius inſuper unam,
Aut plures habet inſuper: hæc ſunt quinque Relata.
Unumquodque Genus ſpecies habet infinitas,
Tantò majores, quò ſimplicitate minores,
In primo genere & quarto; varia eſt aliis lex.
Hæc in ponderibus, menſuris, exprimimuſque
In Numeris; tamen incommenſurabile quoddam
Euclidis Decimus multo ſermone recenſet:
Barbara ſunt harum Rationum nomina; & aures,
Carminaque horrendas trepidant admittere voces.
Illarum ergo vices ſupplebimus, ordinis harum
Nominibus, breviter quæ marginis exhibet ora.

1. Genus, ſuper particulare vel ſubſuperparticulare	ut 3 ad 2 ut 2 ad 3	1. Species, ſeſquialtera ut 3 ad 2 | 2. Seſquitertia ut 4 ad 3 3. Seſquiquarta ut 4 ad 5 | 4. Seſquiquinta ut 6 ad 5, &c. in infinitum.
2. Superpartiens vel ſubſuperpartiens	ut 5 ad 3 ut 3 ad 5	1. Species ſuperbi partiens tertias ut 5 ad 3: 2. Supertripartiens quart. ut 7 ad 4. 3. Super quadrip. quintas, ut 9 ad 5. &c.
3. Multiplex vel ſubmultiplex	ut 4 ad 2 ut 2 ad 4	1. Species, dupla 2 ad 1 | 2. tripl. 3 ad 1. | 3. quadr. 4 ad 1. 4 quintupla ut 5 ad 1. &c.
4. Multiplex ſuperparticulare vel ſubmultiplex ſubſuperpart	ut 5 ad 2 ut 2 ad 5	1. Species, dupla ſeſquialtera ut 5 ad 2. | vel tripla ſeſqu. ut 7 ad 2, &c. 2. Species, dupla, vel tripl. vel &c. ſeſquitertia, ut 7 ad 3 &c.
5. Multiplex ſuperpartiens vel ſub multiplex ſub ſuper part.	ut 11 ad 3 ut 3 ad 11	1. Species, dupla ſuperbi partiens tertias ut 8 ad 3. &c. tripla ſuper quadrup. quintas ut 19 ad 5. &c.

Nota quod omnium multiplicium, ſeu tertij generis, minima eſt dupla: & omnium ſuperparticularium id eſt primi generis maxima eſt ſeſquialtera ſeu ſuperdimidia. In iſto genere & quarto, quò ſimpliciores rationes eò

majores; in aliis non item. Nam quò magis recedunt à simplicitate eò majores fiunt, ut 5 ad 3 minor est ratio quam 7 ad 4. quod patet reducendo eas instar fractorum ad eandem denominationem, illaque erit major quæ plures habebit partes denominatoris, ut, $\frac{5}{3}$ X $\frac{7}{4}$ $\frac{20\ 21}{12}$ ergo $\frac{7}{4}$ major, quia 21 plures partes duodecimas habet quam $\frac{5}{3}$ quæ tantum 20.

Prima potest fieri majorve minorve secunda;
Major semper erit multiplex hisce duabus;
Majores quoque semper erunt tribus hisce sequentes;
Quarta potest quintâ fieri majorve minorve.
Est inter primas major, quæ dimidium in se
Continet, est inter multiplas dupla minorque.

CAPUT III.

De Progressione Arithmetica ac de Collectione quotvis numerorum hujus progressionis in unam summam.

ÆQualis cùm sit semper distantia, in isto
Processu, numeros numeris est addere promptum:
Nil moror hîc igitur. Sed quî Collectio fiat
Hujus summarum processus, accipe paucis.
I. Cùm Numeri incipiunt & distant invicem ab uno,
Si par ultimus est, mediam ipsius accipe partem;
Hanc duc in Numerum qui huic ultrà proximus esset.

Ut 1, 2, 3, 4, 5, 6 | ex 3 in 7 fit 21 pro summa.

Sic, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 | ex 8 in 17 fit 136.

II. Si ultimus est Impar, medium ipsius accipe majus;
Multipliceturque hac mediâ parte ultimus ipse:

Ut 1, 2, 3, 4, 5 | ex 3 in 5 fit 15 pro summa.

Sic, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 | ex 9 in 17 fit summa 153.

III. Ipsam si seriem numeri incipientis ab uno
Solùm interrumpat binarius, ultimus impar
Semper erit, majus medium accipe; quadra.

Ut 1, 3, 5, 7 | ex 4 in se fit 16 pro summa.

Sic 1, 3, 5, 7, 9, 11 | ex 6 in se fit 36.

IV. Si seriem ducens, illam binarius ipse
Continuet, semper par ultimus; accipe partem

Ipsius mediam; In majorem proximiorem
Parti illi mediæ, illam duc; summamque creabit.
Ut 2, 4, 6, 8 | ex 4 in 5 fit 20 pro summa.
Sic, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 | ex 7 in 8 fit 56.
V. Per tria si series sit cæpta & continuata:
VI. Immò quotquot principium à numero impare sument;
Aut impar erit is numerus qui est ultimus; aut par.
Si Impar, ille suo Imparis ordine multiplicetur.
Exemp. | Ut 3, 6 9 | ex 2 in 9 (quia 9 secundus Impar) fit 18 pro summa.
Sic 3, 6, 9, 12, 15 | ex 3 in 15 fit 45 pro summa.
Exemp. | Ut 5, 10, 15, 20, 25 | ex 3 in 25 fit 75 pro summa.
Si Par, ille suo Paris ordine multiplicetur,
Productoque illi mediam partem ipsius adde.
Ut 3, 6, 9, 12 | ex 2 in 12 fit 24, cui addens 6, fit 30 pro summa.
Sic 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 | ex 6 in 36, fit 216, cum 18 fit 234.
Sic 5, 10, 15, 20, 25, 30 | ex 3 in 30 fit 90, cum 15 fit 105 pro summa.
Vel mediam partem numeri sume ultimi; & ipsa
Per numerum majorem uno quàm erit ipsemet ordo
Imparium simul & parium, tunc multiplicetur.
Ut 3, 6, 9, 12 | ex 6 in 5 fit 30 pro summa.
Sic 5, 10, 15, 20, 25, 30 | ex 15 in 7 fit 105 pro summa.
VII. Per quatuor, series si cæpta & continuata;
VIII. Immò quotquot erunt parium sic collige summas:
Accipe dimidiam partem numeri ultimi; & ipsum,
Per numerum majorem uno quam erit ipsius ordo,
Multiplica; sic cunctorum Collectio fiet.
Exemp. | Ut 4, 8, 12 | ex 4 in 6 fit 24 pro summa | sic 4, 8, 12, 16, 20, 24 | ex 7 in 12 fit 84.
Exemp. | Ut 6, 12, 18, 24, 30, 36 | ex 7 in 18 fit 116 pro summa.

Generalissima & brevior Regula, pro quacumque progressione Arithmetica colligenda.

HIc brevior modus. Extremos summam addito in unam;
Dimidium, numero numerorum multiplicato;
Et sic Imparium aut parium Collectio fiet.
Ut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 | 1 & 17, 18 | ex 9 in 17 fit 153.
Sic, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 | 27; ex 13 $\frac{1}{2}$ in 8, fit 108 pro summa.
Sic 4, 8, 12, 16 | 20 | 10 per 4, facit 40 pro summa.
Sic 6, 12, 18, 24, 30 | 36 | 18 per 5 facit 90 pro summa.

CAPUT IV.

De Collectione summarum in progressione Geometrica multiplici.

IN Duplâ, duplica ultimum, & unum retrahe ab illo.
Ut 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 | 1024 | 1023 summa.
per 2 tolle 1 restat
In reliquis: Primum trahe ab Extremo, reliquumque
Divide per numerum qui sit solùm minor uno,
Quàm numerus de quo sumit Progressio nomen;
Extremo integro quotientem hunc addito tandem.

Ut 3, 9, 27, 81, 243 | 240 (120 | 243
tolle 3 | per 2 divide | 120
363 summa.

1024
Sic 4, 16, 64, 256, 1024 | 1020 (340 |
4 | 3 1364 summa.

CAPUT V.

De Continuatione Proportionum Geometricarum seu progressione ejusdem Rationis.

MUltiplex Geometricus progressus habetur,
Si Factum, per eum cui dat Progressio nomen
Multiplices: Factus generat sic quisque sequentem.

Ut in progressione dupla, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. ductus 2 in quemvis producit sequentem.

Sic in tripla 1, 3, 9, 27, 81 &c. ductus 3 in quemvis producit sequentem.

In non multiplici, poterit sic tertius addi
Continua in Ratione, ad primum quam alter habebat.
Alter multiplicet se; Factum divide primo;
Tertius in quotiente erit hac ratione petitus.
Sæpiùs at fractus, raro venit integer inde.

Ex. 1. Si vis tertium addere ad 4 & 6. | ex 6 in se fit 36; qui divisus per 4 (9 | & sic 4, 6, 9.

Ex. 2. ad 6 & 9 | ex 9 in se 81, qui divisus per 6 (13 $\frac{1}{2}$ | sic 6, 9, 13 $\frac{1}{2}$

Continuos poteris numeros sic addere quotvis,

Qui

Qui servent ad se Rationem semper eamdem;
Integrique omnes producantur sine fractis.
Propositæ numeros Rationis sumito primos;
In se ducatur primus, tum multiplicetur
Ipse per alterum, & alter is in se multiplicetur:
Sicque duo, tres in quavis Ratione creabunt.

Ut si tres in proportione sesquialtera velis, sumito 2 & 3, duc 2 in se & fit 4; duc 2 in 3 & fit 6; & duc 3 in se & fit 9; sicque hos tres habes, 4, 6, 9.

Ex tribus his quatuor fient, & quinque creantur
Ex quatuor; sic perpetuò nascentur ab illis
Innumeri, si ordo quivis sic multiplicetur:
Cùm tres, vel quatuor, vel quotquot in ordine dantur,
Omnes per primum tibi propositæ Rationis
Seorsùm multiplicentur in ordine; perque secundum
Ultimus ipse, suo jam anté ordine multiplicatus:
Sic à præterito nascetur proximus ordo.

Exemp. In proportione sesquialtera sic ex 2 & 3 creantur.

tres | quatuor | quinque

4, 6, 9 | 8, 12, 18, 27 | 16, 24, 36, 54, 81 | &c.

Sic in proportione sesquitertia, ex 3 & 4, fiunt.

tres | quatuor | quinque

9, 12, 16 | 27, 36, 48, 64 | 81, 108, 144, 192, 256 | &c.

CAPUT VI.

Alia Methodus, quam divinam vocant inveniendi tot quot volueris numeros continué proportionales in ratione superparticulari; seu dignoscendi quot & quo loco sibi succedere possint numeri continué proportionales.

CUM scitu sit difficile, in quavis ratione
Ex illis numeris quibus est pars insuper una,
Continui sibi quot numeri succedere possint,
Sæpéque in harmonicis plures sit habere necessum;
Quærere per præcedentem labor improbus esset;
Hac methodo tantum poteris breviare laborem;
Scire quot in ratione sibi succedere possint
Integri numeri: in fractis nam Operatio cassa.

Affines ſibi, multiplex quicumque creabit
Tot ſub ſe, quot multiplex is diſtat ab uno.
Tunc numerus, ſuperans alium parte inſuper unâ,
Multiplici affinis dicendus, nomine quando
Pars ſuperans, ſubmultiplex ad multiplicem exſtat;
Qualis dimidia ad duplicem; ad triplicemque triens eſt:
Affinem ergo ſuum cognomine, quiſque creabit
Multiplex numerum qui partem habet inſuper unam:
Sic, qui dimidiam, duplex; triplexque creabit,
Qui ternam; quadruplex, qui quartam habet inſuper in ſe;
Totque ſibi affines multiplex quiſque creabit
Quot numeris diſtat multiplex quiſquis ab uno.
Sic quatuor, quartus multiplex; quinque creabit
Quintus multiplex; reliqui ſic quoſque creabunt
Affines, quot & à monade unuſquiſque recedit.
Partitione autem venient quicumque petiti,
Per ſuperexceſſum, unde capit proportio nomen,
Si quotiens ipſi diviſo addatur; ab illo
Multiplici incipiens, quem debitus ordo miniſtrat.
Ut ſi ſex ſuperoctava intervalla petantur,
Accipienda tibi primùm eſt ratio octupla, ſubque
Ordine multiplici ſexto; intervalla petita,
Sex numero, ſuperoctavâ cum parte dabuntur.
Partitione autem ſuperoctava iſta creantur,
Si numerus ſit diviſus quicumque per octo,
Incipiendo per octuplum qui eſt ordine ſextus,
Addaturque ipſi quotiens; ſic quique ſub ipſo,
Aucti præcedentum octavâ parte, creantur.

Sex Octupli	*Sextus octuplus generans ſex ſuperoctavos.*	
1° octuplus. 2° 3° 4° 5°		
1, 8, 64, 512, 4096, 32768	262144	(*Partes octavæ ſeu quotientes per 8.*
	Sex ſuperoctavi	
	294912	(32768
	331776	(36864
	373248	(41472
	419904	(46656
	472392	(52488
	531441	(59049

Naſcitur hinc via quâ numerus numero additur uni,

Aut ex uno ſubtrahitur, ratione in eadem.

CAPUT VII.

Methodus generaliſsima addendi uni numero, vel ſubtrahendi ex unico, alium numerum in ratione petita, in quovis genere & ſpecie rationum.

SIc addes uni numerum in ratione petita.
Divide, per radicalem minimum rationis,
Oblatum numerum; & toties illi quotientem
Adde, quota eſt diſtantia primorum minimorum.

Ut ſi vis addere ad 30 numerum in ratione 2 ad 3 diviſus 30 per 2, dat 15, qui additus ſemel ad 30 (nam unitate ſolùm diſtant 2 & 3) facit 45 qui ad 30, ut 3 ad 2.

Si ad 45 addendus ſit in ratione 3 ad 5, diviſus 45 per 3 dat 15 qui bis additus ad 45 (nam binario diſtant 3 & 5) dat 75 qui ad 45 ut 5 ad 3.

Sic ad 24 in ratione 1 ad 3, bis 24 dat 48 qui additus ad 24 facit 72 &c.

At per majorem radicalem rationis,
Ut retrahas, numerum oblatum partire & ab illo
Subtrahito toties quotientem, quanta duorum
Primorum rationis erit diſtantia, ut antè.

Ut ex 45 ratio 2 ad 3 ſubtracta dat pro quotiente 15 & relinquit 30.

Sic ex 45 ratio 3 ad 5, ſubtracta per 5 dat pro quotiente 9, qui bis ſubtractus relinquit 27.

Sic ex 72 ratio tripla 3 ad 1. per 3 dat pro quotiente 24 qui bis ſubtractus relinquit 24.

CAPUT VIII.

Ad duos numeros quorum ratio ignoratur, addere tertium in eadem ratione, vel ſubtrahere.

AD binos autem, quorum ignoras rationem,
Tertius hocce modo addetur ratione in eadem;
Majorem binorum in ſe duc; perque minorem
Divide multiplicatum, erit in quotiente petitus.

Ut ſi ad 36 & 60 vis addere tertium, multiplica in ſe 60, & fit 3600, quem divide per 36, venit in quotiente 100. qui eſt ad 60 ut 60 ad 36.

Invertens retrahes sic : multiplicato minorem
In sese, dein per majorem, divide factum;
In quotiente aderit minor in ratione, ut uterque.

Ut si ad 100 & 60, tertium velis minorem in eadem ratione, multiplica, 60, per se, fit, 3600, qui divisus per 100 dat 36, qui ad 60, ut, 60 ad 100.

Partitio rationem ignoratam tibi tradet,
Per commune metrum quod mensurabit utrumque.

Ut 36 & 60 per 12; ac 60 & 100 per 20, veniet ratio 3 ad 5.

CAPUT IX.

Quid agendum cum numerus quis caret parte petita in integris numeris.

SÆpè fit ut careat numerus quis parte petitâ
Integrâ : tunc is per partem hanc multiplicandus;
Ipsique addenda est dein multiplicatio facta;
Multiplicato erit additus in ratione petita.

Ut quia 64 caret tertia parte, seu ratione 3 ad 4; per 3 multiplicatus 64, dat 192, cui addens 64, fit 256 qui ad 192 est in ratione supertertia 4 ad 3.

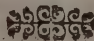
CAPUT X.

Quomodo probatur, numeros esse in tali aut tali ratione.

SIc numeros quosque in ratione datâ esse probabis,
Majorem numerum per majorem rationis,
Per minimum rationis item partire minorem;
Idem proveniet quotiens numeris ab utrisque.
Multiplicatus item quotiens minimis ab utrisque,
Restituet pariter numeros utrosque priores.

Ut probes 192 & 256 esse in ratione 3 ad 4. divide 256 per 4, & 192 per 3, proveniet utrobique 64.

Item si multiplicaveris 64 per 4 & per 3 venient priores 256 & 192.



CAPUT XI.

Invenire primos seu minimos numeros rationis præsertim superparticularis, sive illa sit cognita seu non.

IN numeris qui se excedunt parte insuper unâ
Est facilé ad numeros rationem adducere primos,
Sive sit illorum species bené cognita, seu non:
Cognita si sit, tunc primos divisio tradet,
Majoris Numeri per majorem rationis,
Perque minorem ac si minimi divisio fiat,
Idem proveniet quotiens numeris ab utrisque.
Hæc eadem est ac præcedens tibi tradita norma.

Ut si cognita sit ratio 72 ad 64 nempe 9 ad 8 dividendo 72 per 9, veniet quotiens 8, & dividendo 64 per 8 minimum rationis idem veniet quotiens 8.

Cognita si non sit, tunc per distantiam utrorum,
Amborum minimos subtractio tradet utrosque.

Ut si incognita sit ratio 72 ad 64, tunc per distantiam seu differentiam, nempé 8, subtractio ex 72 dabit 9, ex 64, dabit 8, pro minimis utrisque.

At si Partitio, aut Subtractio longa videtur,
Præcipué in Numeris quorum exuperantia multis
Partibus exstiterit; communem quærito primam
Mensuram, per eam quam Tertius edocet artem.

Ut si dati sint numeri 96 & 60, vel in minoribus 24 & 15, reducentur ad minimos 8 & 5 per eorum communem mensuram 3, quæ alia esse nequit inter 24 & 15. 96 autem & 60 possunt reduci per 12 ad 8 & 5.

Per tertiam autem Regulam secundi cap. Libri tertij, 24 & 15 per tria numerantur sicut & 96 & 60. Sed in his 96 & 60 veniunt in primis quotientibus 32 & 20. qui rursus divisi per 4 communem mensuram veniunt in secundis ultimis quotientibus 8 & 5. vel 32 & 20 remissi ad 16 & 10, per 2 dant. 8 & 5: ad quos devenient dimidiando 16 & 10, 8 & 5.



CAPUT XII.

De Continuatione Progreßionis Harmonicæ, ſeu de Additione tertij termini majoris & minoris ad duos datos in proportione Harmonica, quando id fieri poteſt.

HArmonica in Ratione, ad binos Tertius addi
Terminus haud poterit, duplâ in ratione, vel ultrà.
Cum fuerint igitur duplâ ratione minores,
Tertius Harmonicus poterit ſic terminus addi:
Multiplica binos in ſe; diſtantiam eorum
De minimo retrahe; ac reliquo iſto divide Factum
Ex binis in ſe ductis, hinc Tertium habebis.

Ut ſi addendus ſit tertius. ad 4 & 6. | ex 4 in 6, fit 24
per diſtantiam 4 à 6 detractam ex 4 nempe 2. divide 24. | $\frac{24}{2}$ (12 | 4, 6, 12.

Sic ad 3 & 4 addes. | ex 3 in 4 fit 12 | diſtantia 1 à minimo 3, 2 relinquit, divide 12 per 2 (6 | 3, 4, 6.

At Impoſſib. ad 3 & 6 tertium addere. | nam ex 3 in 6 fit 18, qui diviſus per diſtantiam 3. dat in quotiente 6.

De Additione tertij minoris ad duos datos in eadem proportione harmonica.

MUltiplica binos in ſe; diſtantiam eorum
Addito majori; producto divide Factum
Ex binis in ſe ductis, hinc Tertium habebis.

Ut ad 12 & 6. ſi addendus ſit minor | ductis 12 in 6 = 72 | diſtantia eorum nempe 6 addita majori facit 18.

hac divide $\frac{72}{18}$ (4 | 12, 6, 4.

Sic ad 6 & 4 tertius minor. | 6 in 4 = 24 | diſtantia 2 ad 6 facit 8. | divide 24 per 8 (3 | | 6, 4, 3.

CAPUT XIII.

De Comparatione seriei Naturalis seu Arithmeticæ cum Geometrica Multipla, continua vel discreta.

SI seriem Naturalem Geometricamque
Ad sese referas, fiet collatio talis.
Additio in prima est, quod multiplicatio in ista:
Quod Subtractio in illa est, est Divisio in ista.
Hoc posito, Medij cum Extremis sic in utraque:
Tot Mediorum, Extremorum quot junctio in illa;
Quot Mediorum, Extremorum tot ductio in ista:
Tot Subducti à se primi, quot & ultimi in illa:
Tot quoque Divisi primi, quot & ultimi in ista.

Ut sicut in Arith. progr. 3, 7, 11, 15, duo extremi additi tantum faciunt quàm duo medij additi, utrobique enim fit 18. scilicet 3 & 15 | & 7 & 11.

Ita in Geometrica, 3, 6, 12, 24. duo extremi multiplicati inter se, tantum faciunt quantum duo medij inter se multipl. utrobique enim fit 72.

Et sicut in Arith. prog. 8, 13, 18, 23. Subducti à se primi, tantum relinquit quantum subducti ultimi, nempé 5 utrobique.

Ita in Geometrica, 2, 6, 18, 54, idem provenit ex primorum divisione quod ex ultimorum item divisione, scilicet 6 divisus per 2 dat 3, & 54 per 18, item 3. Sic 2, 6, 3, 9, restat item 3.

CAPUT XIV.

De potentia Mediorum & Extremorum in tribus proportionibus, Geometricis, Arithmeticis & Harmonicis.

INter tres Geometricos, medius dabit in se
Ductus, quantum Extremi in sese multiplicati.

Ut, 4, 6, 9 | ex 6 in se fit 36; & ex 4 in 9, item 36.

At tres inter Arithmetos, medius dabit in se
Ductus, quantum extremi in sese multiplicati,
His si addas ductam in sese distantiam utramque.

Ut 2, 4, 6 | ex 4 in se fit 16; & ex 2 in 6 fit 12, cui additâ utraque distantiâ 2 & 2, fit 16.

Harmonicæ medius, sic in se ductus adæquat

Extremos in se ductos, si junxeris illi
In sese ductam pariter distantiam utramque.

Ut 3, 4, 6 | ex 4 in se fit 16, cui addendo ductam in se utrorum distantiam ad extremos utrosque scilicet 2 fit 18, & totidem ex 3 in 6, 18.

Ast inter quatuor Geometricos ita res est.
Tot faciunt Extremi inter se multiplicati,
Quot Medij faciunt etiam in se multiplicati.

Ut 2, 4, 8, 16 | ex 2 in 16 fit 36; & ex 4 in 8, fit item 32.
Sic 8, 12, 18, 27 | ex 8 in 27 fit 216; & ex 12 in 18, fit item 216.

Sic quartus veniet, sic primus se offeret ultrò:
Si tres sint, medium in ternum duc; divide factum
Per primum; in quotiente aderit qui est ordine quartus:

Ut 2, 4, 8 — ? | ex 4 in 8 fit 32 qui divisus per 2, dat 16 | 2, 4, 8, 16.

Multiplica medios inter se; divide factum
Per quartum, in quotiente aderit qui est ordine primus
Hinc Recta, hinc Inversa quoque Aurea Regula nata.

— ? 4, 8, 16 | ex 4 in 8 fit 32 qui divisus per 16 dat 2, primum.

Quadratum faciunt quatuor se multiplicantes.

Ut 2, 4, 8, 16 | ex mutua horum quatuor in se multiplicatione fit 1024 quadratus.

CAPUT XV.

De mutua transmutatione Proportionis Arithmeticæ in Harmonicam & Harmonicæ in Arithmeticam.

seu

De Inventione medij Harmonici & Arithmetici.

SUme duos Numeros, inter quos ponere mens est
Harmonicum medium; illos addito, dimidiumque
Junctorum, medium inter eos procreabit Arithmum.
At si ex additione impar; primos duplicato,
Dimidium ut ritè sumi queat inter utrumque.

Ut 4 & 6, junctis fit 10, cujus dimidium 5, qui medius inter 4 & 6 | 4, 5, 6.
At si 4 & 5 junxeris, fit 9 qui non habet medium; ideò duplica 4 & 5, & fit 8 & 10. | 18 | 9. | 8, 9, 10.

Harmonica hinc veniet Proportio dicta, Secundum
Et Ternum si multiplices Primo; inde Secundo

Multiplices

Multiplices Ternum. Et, sic fiet Arithmica ab ista.

Ut ex hac Arith. 4, 5, 6, fiet harmonica, multiplicando 4 in 5 & fit 20, deinde, 4 in 6 & fit 24; ac tandem 5 in 6 & fit 30. | 20, 24, 30. Harm.

Et ex harm. 20, 24, 30, fiet Arithmetica, multiplicando 20 in 24 & fit 480; deinde 20 in 30, & fit 600; ac tandem 24 in 30 & fit 720 | 480, 600, 720. Arith.

Ergo cum fuerint hac in Ratione vel illa
Tres numeri, sic hæc Ratio transibit in illam:
Per primum medius, dein ultimus ordine crescant;
(Ecce duos jamjam Primos Rationis alius:)
Perque ipsum medium crescat tandem ultimus ipse,
Quem primis jamjam factis appone duobus:
Altera sic Ratio ex facta Ratione creatur.

Harmonica 3, 4, 6	Arithmetica 2, 4, 6
in Arithmeticam. 12, 18, 24	in Harmonicam. 8, 12, 24

At numeri, cùm fit talis Conversio, crescunt:
Si vis decrescant, mensuram sumito Primam
Primi cum binis aliis, numerosque reducat
Partitio; sic decrescens Conversio fiet.

Sic Arithmetica 12, 18, 24	Et sic Harmonica 8, 12, 24
per 6	per 4
decrescet in, 2, 3, 4	decrescet in, 2, 3, 6.
Sic Harmonica 20, 24, 30	Et sic Arithmetica 480, 600, 720
per 2	per 10.
decrescet in, 10, 12, 15	decrescet 1°. in, 48, 60, 72,
	2°. per 6, in. 8, 10, 12
	3°. per 2. in 4, 5, 6.

CAPUT XVI.

Praxis quatuor Regularum circa duas aut plures Rationes separatim sumptas, seu simplices Proportiones Geometricas.

HAs Praxes Rationum admittit Musica tantùm;
Quinetiam primis tantùm utitur illa duabus:
Scilicet aut ad se Rationes addere curat,
Aut Retrahit; nec Multiplicat nec Dividit usquam.
Has quatuor tamen hic mens est apponere Praxes,
Ne qua huic nostro Operi fortasse Operatio desit.

Additio Proportionum.

HIc eſt Additio, multorum Adductio in unum.
Cum tibi ſunt plures ſimul addendæ Rationes,
Illas ad minimos numeros adducito primùm.

Ut ſi proponantur addendæ 6, 9; & 12, 16
ſic reducendæ erunt. 2, 3, & 3, 4.

Multiplicato Duces Ducibus, Comiteſque ſeorſum:
Et ſic ex multis Proportio habebitur una;
Quam ad numeros poteris, ſi magna, reducere primos.

A B : C D | A C | B D
Ut ſi addendæ 2, 3, & 3, 4 | ex 2 in 3 fit 6; & ex 3 in 4, fit 12
ſicque additæ fiunt 6, 12, ſeu 1, 2.

A B C D E F | ACE BDF
Sic addendæ 1, 2: 2, 3: 3, 4 | additæ faciunt 6, 24, ſeu 1, 4.

Subtractio Proportionum.

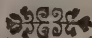
IStius Comitem, alterius Duce multiplicato;
Huncque Ducem, Comite alterius; Subtractio facta eſt.

A B , C D | A D | C B
Ut ſi ſubtrahenda ſit 2, 3, ex 3, 4 | duc 2 in 4, fit 8; & 3 in 3, fit 9.
Sicque retrahendo ſeſquitertiam ex ſeſquialtera, ſupereſt ſeſquioctava; quod in Muſica eſt, retrahere quartam ex quinta, ſupereſt tonus; cum ratio quartæ ſit in ratione 3 ad 4, & ratio quintæ 2 ad 3; & ratio toni, 8 ad 9.

Multiplicatio Proportionum.

MUltiplicans pone hunc toties, quot in illo erit unum:
Pone Duces Comiteſque, in Multiplicante quot unum eſt;
Inde Duces duc in ſeſe, Comiteſque ſeorſum;
Et ſic ex multis Proportio habebitur una.

Ut ſi multiplicanda ſit Proportio 2 ad 3, per 3. ter pone duces ſic 2, 2, 2; & ter pone Comites ſic, 3, 3, 3. deinde ex ducibus in ſeſe fit 8; & ex Comitibus in ſeſe, 27. | 8, 27.



Divisio Proportionum.

PArtitio fiet retrahendo ex multiplicato;
Et toties, quoties retrahi Divisio poscit.

Ut si ex 27 & 8, bis retrahi proponatur proportio 2 ad 3. bis pone ducem 2, 2, hoc est 4; & bis Comitem 3, 3, hoc est 9 multip. divide 8 per 4 & veniet 2; & 27 per 9 & veniet 3.

Sicque ex 27, & 8, superest Proportio 2 ad 3.

CAPUT XVII.

Regula Proportionum Aurea sive Trium Terminorum, quibus addendus est quartus Proportionalis in ratione discreta, non continua.

AD Tres jam positos, sic Aurea Regula monstrat,
Quartum apponere, qui Rationem servet eamdem
Cum Terno, quam ad sese primus & alter habebant.
Ternum multiplicet qui primo proximus adstat,
Dividat hunc primus, quotiens dabit hinc tibi quartum.
Vel; Quartus fingatur adesse ut fecimus antè,
Multiplica medios inter se; divide Factum
Per primum, veniet qui fingebatur adesse.

Ut 2, 3, 4, —? | ex 3 in 4 fit 12 | qui divisus per 2 dat 6 | 2, 3, 4, 6.
Sic 12, 15, 20 | ex 15 in 20 fit 300, qui divisus per 12 dat 25. | 12, 15, 20, 25.

Vel: cùm majores numeri; primo atque secundo
Ad minimos numeros adductis, divide ternum
Per primi minimum, & toties terno quotientem
Adde quota est distantia primorum minimorum.

Ut si quæratur quartus ad 8, 12, 18? adducti. 8 & 12 ad minimos 2 & 3; divide 18 per 2, & quotientem 9 adde ad 18, semel; quia 2 & 3, tantùm unitate distant, & fiet pro quarto 27. Sic 8, 12, 18, 27 |

Ita 32, 56, 96? 168 | quia minimi primorum, 4 & 7, tribus à se distant; divisusque 96 per 4, dat 24, qui ter, facit 72, qui additus ad 96 dat 168 pro quarto.

Addito si Comes est major Duce: Subtrahe, quando
Dux major Comite, ex terno inventum quotientem.

Ut 12, 8, 27? 18 | 56, 32, 168? 96.
3 2 3 (9 | 7 4 7 (24 $\frac{3}{72}$

Si Tres propoſiti ſint Fracti: quærere Quartum
Hac methodo poteris: Qui eſt infimo in ordine primus,
Per Nuıueratores ducatur poſteriores
Continué hunc & factum illius multiplicantes;
Quique locum tenet in ſupremis ordine primum,
Creſcat per Nomenclatores poſteriores
Continué hunc & factum illius multiplicantes;
Pro Quarto, Factum ad primos redigatur utrumque,

Ut $\frac{A\,2}{D\,3}\ \frac{B\,5}{E\,6}\ \frac{C\,3}{F\,4}$? |
D B G C G H A E
ex 3 in 5 fit 15, ex 3 in 15 fit 45 | & ex 2 in 6
I F I K H K
fit 12, ex 4 in 12 fit 48 | tandem 45 & 48, reducti
ad minimos per 3 faciunt $\frac{15}{16}$ | $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}$.

Si partim Integri aut Fracti ſint propoſiti Tres;
Integrum & Fractum, fractum redigantur ad unum;
Sub ſolo Integro ſcribe unum: ſicque redactis
Omnibus ad fractos Integris; perfice ut antè.

A B
Ut ſi proponantur 3 $3\frac{1}{2}$ $2\frac{2}{3}$? | ſic reduces $\frac{A\,3}{D\,1}, \frac{B\,7}{E\,2}, \frac{C\,8}{F\,3}$,
D B G A E H F I
age ut ſupra, ex 1 in 7 & 8 in 7 fit 56 | & ex 3 in 2 ac deinde ex 6 in 3 fit 18.
tandem reductis 56 & 18 ad minimos fit $3\frac{1}{9}$ pro quarto |

Ergo quatuor ſic erunt 3 $3\frac{1}{2}$ $2\frac{2}{3}$ $3\frac{1}{9}$ |

CAPUT XVIII.

Probatio Regulæ Aureæ, ſeu Inverſa Trium Regula.

Regula, ſi bené vel malé, ſic Inverſa probabit.
Sit primus fuerat qui tertius; eſto ſecundus
Qui quartus fuerat; qui primus, tertius eſto.
Res bené ſi occurrat quartus, qui erat antè ſecundus;

Aurea si veniat præcedens praxis in usum,

Invertens , 4 , 6 ; 2 —? ex 6 in 2 , fit 12 , qui divisus per 4 dat 3. per praxim præcedentem. Sic loco , 2 , 3 , 4 , 6 : fit 4 , 6 , 2 , 3.

CAPUT XIX.

Datum numerum in tres dividere partes proportionales aliis tribus datis numeris.

OBlatum si vis numerum in tria frusta secare,
Quorum tres ad propositos ratio æqua probetur:
Junge simul tres propositos; hac utere summa
Pro primo semper; sit juxta hunc quisque Datorum
Ordine quique suo: sic semper Tertius esto
Oblatus numerus qui est in tria frusta secandus;
Quartum quemque dabit vice quâque operatio trina,
Dummodò te regat in praxî Aurea Regula Recta:
Hinc mercatorum aut Sociorum Regula venit.
Hoc breviùs. Quam propositi juncti rationem
Servant ad numerum oblatum in tria frusta secandum,
Hanc tres quæsiti servent ad quemque datorum.
Par ratio in fractis; modò ad Integra, Fracta reducas,
Juxta propositi secti in tria frusta valorem.

A B C D
Sit 18 dividendus in tres partes proportionales his 4, 2, 3. | junctis
B C D E | 1ª *Operatio* | 2ª *Operatio* | 3ª *Operatio*
4, 2, 3, fit 9 | E B A F | E C A G | E D A H
9, 4, 18 —? (8 | 9, 2, 18 —? (4 | 9, 3, 18 —? (6

F G H A B C D.
Erunt ergo, 8, 4, 6 (qui faciunt 18) proportionales tribus datis 4, 2, 3.

E B, C, D A
Aliter, ut 9 (scilicet juncti 4, 2, 3) ad 18 numerum oblatum in tres partes dividendum.

B F A C G D H
Ita 4 1º datorum ad 8 1ª partem numeri 18 | Ita 2 ad 4; & 3 ad 6.

A B C D
In Fractis. Sit 36 diuendendus in tres partes proport. his tribus $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

B C D
Valor Fractorum in integris $\frac{1}{3}$ de 36 est 12 | $\frac{1}{4}$ est 9 | & $\frac{1}{6}$ est 6.

B C D E E A
Juncti 12, 9, 6 faciunt 27. | ut autem 27 ad 36
F G G H B C D F G H
Ita 16 ad 12 & 12 ad 8 | ergo ut 12, 9, 6; sive $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ | Ita 16, 12, 8; qui
A
faciunt 36.

Vide Cap. ultimum hujus libri.

CAPUT XX.

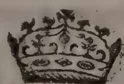
Regula Falsi, id est, per suppositum Falsò numerum invenire verum, qui petitam rationem aut partes habeat ad alium certum Numerum.

Verum per Falsum, sic quærere Regula monstrat.
Cum quæris numerum, qui aliquâ cum parte suimet
Efficiat certum numerum; ad libitum accipe quemvis,
Cui nomen Falsi datur; Is cum parte petita
Non illum generet numerum qui quæritur; inde
Certum multiplicet Falsus; dein dividat alter,
Scilicet is qui de Falso & de parte petita:
Quartus erit verus qui quæritur. Algebra lex est.

Exemplum Regulæ Falsi.

Quis, mediâ cum parte sui, facit octodecemque?
Accipias sex; cum medio, inde novena creantur.
At mihi non novem erant quærenda, sed octo decemque;
Falsus in octodecim ducatur; dividat alter,
Scilicet is qui de sex est, medioque, creatus;
In quotiente aderit verus, Falsi arte petitus.

Quis cum medio facit 18.?
Suppone esse 6: at cum medio 3, facit tantùm 9.
Ducatur ille 6 in 18 & fit 108 qui divisus per 9 dat 12.
Et ipse 12 est verus, nam cum medio 6, facit 18.



CAPUT XXI.

Regula duplicis positionis Falsi.

SIc Duplici Falsi positu perquirito verum.
Fortuitum âccipias, qui aliquâ cum parte sui, non
Propositum efficiat numerum; distantia ab ipso
Major vel minor ad latus adscribatur; & alter
Quæratur, qui, aliquâ pariter cum parte sui, non
Efficiat numerum datum; item distantia ab ipso
Major vel minor ad latus adscribatur; & omnes,
Scilicet assumpti Falsi, & distantiæ eorum,
Transverso crucis in formam ordine multiplicentur.
Si similis fuerit distantia, ita ut, vel utrique
Majores fuerint numeri, vel utrique minores;
Tollatur factum minus à majore, minorque
Tollatur de majori distantia; & istâ
Divide producti reliquum; potieris adepto,
In quotiente aderit verus tantâ arte petitus.
Sin verò absimilis distantia, ita ut minor una,
Altera sit major; productum utrumque, simulque
Utraque conjungenda sibi distantia; & istam
Dividito summam hâc aliâ; potieris adepto,
In quotiente aderit verus tantâ arte petitus.

Axioma in Regula Falsi duplicis.
Subtrahito similes, addito dissimiles.

Exempl. 1. in quo similis distantia quis cum medio facit 9?

1ª *Operatio.*

1° Suppone 2, cum medio 1, facit 3. distantia 3 ad 9 est 6 minor | 2, 6|

2ª *Operatio.*

2° Suppone 4, cum medio facit 6. distantia 6 ad 9 est 3 minor | 4, 3.|

2	X	6	24	6	18 (6 verus.
4		3	6	3	
6		24	18	3	

Nam 6 cum medio 3 facit 9.

Exempl. 2 in quo dissimilis distantia quis cum medio facit 9?

1ª *Operatio.*

1° Suppone 2, cum medio 1 facit 3. distantia 3 ad 9 est 6 minor | 2, 6

2ª *Operatio.*

1° Suppone 10, cum medio 5 facit 15 distantia 15 ad 9 est 6 major | 10, 6.

2	X	6	12	6	72 (6 verus.
10		6	60	6	12 (
12		60	72	12	

CAPUT XXII.

De inventione duorum occultorum numerorum per datam proportionem & investigatam ratiocinatione aut datam eorum distantiam, viâ Arithmeticæ æquè ac Algebræ.

IGnoti bini numeri, (proportio si sit
Oblata, ac si sit quâvis ratione reperta
Inter eos distantia,) mox tibi sese ita prodent.

Exemplum in proposito per Euclidem Ægnimate Muli & Asinæ.

Mulus portabat vinum comitatus asella
Hæc oneris queritur pondera vasta sui:
Ille graves matris gemitus miratur, & inquit,
Cur adeò lacrymis lumina mæsta fluunt?
Unam mensuram si nostros fundis in utres,
Ipse tui vini pondera dupla feram:
Sin unam contrà nostro de fasce levabis
Partem, tunc æquum pondus uterque feret.
Dic mihi mensuras sapiens Geometer istas,
Non aliter Phæbi nomine dignus eris.

Solutio per investigationem distantiæ seu excessûs ponderum utriusque.

UNam Asina accipiens, amittens Mulus & unam,
Si fiant æqui, certè utrique antè duobus
Distabant à se. Accipiat si mulus at unam,
Amittatque asina unam, tunc distantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cum pondera dupla
Sint asinæ. Huic simplex, mulo est distantia dupla:
Ergo habet hæc quatuor tantum, mulusque habet octo.
Unam asinæ si addas, si reddat mulus & unam,
Tunc ignota priùs tibi pondera clara patebunt;
Mensuras quinque hæc, & septem mulus habebat.

Probatio.

Probatio.

Si aſina habens 5, accipiat unam à mulo habenti 7, tunc aſina & mulus habebunt 6, & æqui erunt:

At ſi aſina dederit unam mulo, illa tantum 4 & mulus 8 habebit, duplum ſcilicet aſinæ, quod erat petitum.

Hinc Canon ſeu Praxis.

Inveniendi in quavis proportione data, binos numeros per diſtantiam ſeu exceſſum.

Sic in multiplis, numeros diſtantia tradet
Ignotos, data ſi tibi ſit proportio nota.
In duplâ; numerus minor, eſt diſtantia; & ipſa
Si dupletur, erit numerus, diſtantia, major.

Ut ſi in proportione dupla fuerit inventa diſtantia 6, certé hi duo numeri erunt 6 & 12.

In triplâ; binas numeri diſtantia partes
Continet in ſe majoris, duplumque minoris:
Adde ergo medium vel retrahe, habebis utrumque.

Ut ſi ſit inventa diſtantia 6, in proportione tripla, ſi illi addas dimidium 3 habebis 9 majorem numerum, ſi retrahas dimidium 3, habebis minorem 3. ſic 3 ad 9, quorum diſtantia 6.

In quadruplâ ſic: Tres numeri diſtantia partes
Continet in ſe majoris, triplumque minoris:
Ergo trientem ſi ipſa ſuum diſtantia ſumat
Majorem efficiet numerum; binoſque trientes
Seu beſſem amittens, numerum dabit ipſa minorem.

Ut ſi ſit inventa diſtantia 12, in proportione quadrupla, ſi illi addas ſuum trientem 4, habebis majorem numerum 16: ſi retrahas duos trientes 8, habebis minorem numerum 4. ergo 4 & 16 in quadrupla, habent 12 pro diſtantia.

Sic in quintuplâ: diſtantia adaucta quadrante
Majorem efficiet; ſublato terque quadrante
Ipſe minor veniet numerus: ſic cætera fient:
Addendo aut retrahendo prout proportio creſcit:
Pro majore addens numero partem minùs unam;
Bis minùs at retrahens, quàm ſit proportio, eamdem
Quam major partem; efficies hac arte minorem.

In quintupla ſi diſtantia ſit 20, adaucta quadrante, 5, dabit 25 pro majore: ter ſublato quadrante nempe 5, dabit 5 pro minore; 5; (20) 25.

Sic in ſextupla, diſtantia 30, aucta quinta parte dabit 36, diminuta quater quinta parte dabit 6. 6 (30) 36.

In ſeptupla, differentia 42, aucta ſexta parte dabit 49. minuta quinquies ſexta parte dabit 7. 7 (42) 49.

In octupla, differentia 56, aucta ſeptima parte dabit 64, minuta ſexies ſeptima parte dabit 8. | 8 (56) 64. | &c.

In non multiplis, diſtantia multiplicetur
Per binos minimos numeros poſitæ rationis;
Cum ratio non multiplex, eſt particularis.

Ut in ſeſquialtera proportione, ſi diſtantia ſit 4, multiplicetur per 2 & 3, & veniet 8 pro minore numero, 12 pro majore; 8 (4) 12.

In ſeſquiquarta, differentia 3, multiplicata per 3 & 4, dabit 9 & 12. 9 (3) 12.

In ſeſquioctava, differentia 1, multiplicata per 8 & 9, eoſdem procreabit. 8 (1) 9. Si differentia eſt 2, venient 16 (2) 18.

In dupla ſeſquialtera, diſtantia dividatur per diſtantiam minimorum terminorum proportionis duplæ ſeſquialteræ nempé per 3 diſtantiam 5 & 2 minimorum ſeu primorum terminorum, & quotiens multiplicetur per minorem numerum proportionis nempé per 2. Ut ſi ſit data diſtantia 100, diviſa per 3 dabit pro quotiente $33\frac{1}{3}$ qui multiplicatus per 2, dabit minorem numerum quæſitum $66\frac{2}{3}$ & major erit $166\frac{2}{3}$.

In ratione autem in qua plures inſuper exſtant
Partes, tunc per primorum diſtantiam utrorum
Partire hanc; quotientem & primos duc in utroſque.

In ſuperpartiente: Dividatur exceſſus ſeu diſtantia data per diſtantiam duorum minimorum terminorum proportionis datæ, & quotiens multiplicetur per utrumque terminum minimum proportionis, minor dabit minorem, major majorem.

Ut ſi in ſuperbipartiente tertias, cujus minimi termini 3 & 5, ſi detur diſtantia 6. dividatur illa per 2 diſtantiam terminorum 3 & 5, & quotiens 3 multiplicatus per 3 & 5 dabit 9 & 15 quorum diſtantia eſt 6.

Sic ſi in proportione 9 & 14 detur diſtantia ſeu exceſſus 90. dividatur illa per 5, diſtantiam 9 & 14, veniet in quotiente 18, qui multiplicatus per 9 & 14 dabit 162 & 252, quorum diſtantia eſt 90.

Sic etiam in multiplici ſuperparticulari. Ut in dupla ſeſquialtera, cujus minimi termini ſunt 2 & 5, ſi detur diſtantia 75, illa diviſa per diſtantiam 3 terminorum 2 & 5 dabit in quotiente 25 qui multiplicatus per 2 & per 5, dabit 50 & 125 quorum diſtantia 75.

Sic etiam in multiplici ſuperpartiente. Ut in tripla ſupertripartiente quartas, cujus minimi termini 19 & 4, ſi detur diſtantia 45, illa diviſa per 15 diſtantiam 19 & 4 dabit 3 in quotiente qui multiplicatus per 19 & 4, dabit 57 & 12, quorum diſtantia 45.

Generalissima methodus in quavis proportione.

Si sit tum proportio, tum distantia nota;
Partire hanc per primorum distantiam utrorum
Illius numerorum, ipsum dein per quotientem
Multiplica primos numeros rationis utrosque:
Majoris Factus, major; Factusque minoris,
Quæsitus minor est numerus; te Exempla docebunt.

Scilicet distantia data aut inventa dividatur per distantiam minimorum seu primorum terminorum datæ proportionis; tùm quotiens multiplicetur per utrumque minimum terminum datæ proportionis. Minor dabit minorem numerum quæsitum, major majorem.

Exempla in unoquoque genere Proportionum.

Si quærantur duo numeri.

In superparticulari, v.g. in sesquialtera, quorum distantia sit 4, dividatur 4 per distantiam quæ est inter 2 & 3, scilicet per 1, venit in quotiente, ipse 4, qui multiplicatus per 2 & 3 dat 8 & 12, quorum distantia est 4.

In superpartiente, v.g. in superbipartiente tertias, distantia 6, dividatur per distantiam 3 & 5, nempe per 2, venit 3 in quotiente, qui multiplicatus per 3 & 5 dat 9 & 15, quorum distantia 6.

In multiplici, v.g. in quadrupla, distantia 12 dividatur per 3 distantiam inter minimos terminos proportionis quadruplæ 1 & 4, veniet 4 pro quotiente, qui multiplicatus per 1 & 4, dabit 4 & 16 quorum distantia 12.

In multiplici superparticulari, v.g. in dupla sesquialtera, distantia 100 divisa per 3 distantiam 2 & 5, dabit $33\frac{1}{3}$ qui multiplicatus per 2 & 5, dabit $65\frac{2}{3}$ & $166\frac{2}{3}$.

In multiplici superpartiente, v.g. in dupla superbipartiente quartas, distantia 33 divisa per 11 distantiam 4 & 15, dat 3, qui multiplicatus per 4 & 15 dabit 12 & 45 quorum distantia 33.

CAPUT XXII. Appendix ad Cap. XIX.

Datum quemvis numerum dividere in quotlibet partes quæ petitas proportiones constituant.

Iunge simul minimos harum numeros rationum;
Propositum primò numerum istâ divide summâ:

Per minimos quotientem hunc multiplicato ſeorſum,
In facto veniet ratio quæcumque petita.
Utile ſi quid in Harmonicis eſt, Regula certé hæc.

Ut ſi ſit 369 dividendus in partes duplam rationem ſervantes, junctis 2 & 1, minimis hujus rationis terminis, divide 369 per 3 veniet in quotiente 123 pro minore, qui duplatus dabit 246 qui ad 123 ut 2 ad 1. ac 123 & 246 reſtituunt numerum 369.

Sic 360 dividendus in ſeſquialtera proportione, per 3 & 2 junctos nempe 5 diviſus, venit 72, qui multiplicatus ſeorſum per 2 & per 3 dat 144 & 216, in ratione 2 ad 3.

Ita ſi numerum 600 velis dividere in rationem duplam, ſeſquialteram & ſeſquitertiam junge ſimul minimos harum proportionum terminos 1, 2, 3, 4, qui faciunt 10. per 10 divide 600 veniet 60, qui multiplicatus ſeorſim per 1, 2, 3, 4, dabit pro dupla 60 & 120. pro ſeſquialtera 120 & 180 ſcilicet 60 per 2 & 3. pro ſeſquitertia 180 & 240, ſcilicet 60 per 3 & 4.

Sic ſi numerus 59562, in partes has rationes ſervantes 5, 4, 6, 12, ſcilicet ſeſquiquartam 5 ad 4, ſeſquialteram 4 ad 6, duplam 6 ad 12; ex collectis in unam ſummam 5, 4, 6, 12 fit 27 per quem diviſus 59562, venit in quotiente 2206, qui multiplicatus ſeorſùm per 5 dat 11030; per 4, 8824; per 6, 13236; per 12, 26472, qui inter ſe ſervant rationes petitas & reſtituunt numerum 59562.





LIBER SEXTUS

ARITHMETICA HARMONICA.

Seu de Proportionibus ad Sonos & Intervalla Musicæ pertinentibus.

CAPUT PRIMUM.

De Convenientia Sonorum & Numerorum; & quâ viâ, Rationes utrorumque investigandæ sint.

SINTNE Soni, Numeri, non est hîc quæstio nobis:
Multa Sonos certè & Numeros communia habere,
Harmonicamque subalternatam Arti Numerandi,
Is credet qui Antiquorum monimenta revolvit:
Jurené an immeritò per nos sub judice lis sit.
Nil etiam hîc curæ nobis vibratio chordæ;
Ad grave cùm nihil aut ad acutum hæc motio præstet;
Fortior hinc tantùm sonus aut productior exstat,
Debilior, breviorve; licèt contraria dicant,
Quos, Praxi abjectâ, docuit meditatio sola.
Incudem cum malleolis, aut pondera chordis
Appensa, ut falsa utraque primi explosimus ipsi.
Est Samij solùm Monochordi inventio certa.
Hujus ope Proportio & Intervalla Sonorum,

Per chordam rectà extenſam & varié interceptam
Ac certis numeris diviſam, quæque dabuntur.
Machinula inſtar equi, chordæ ſubpoſta, pererrans,
(Ponticulum, Graij Magadem, dixêre) ſecabit
Hinc illinc Chordam; ſecta illa ſonabit utrinque:
Ex chorda majore ſonus gravis, exque minore
Altior, in vacuaque graviſſimus, æquus ab æqua.
Quin ſibimet poterit vacuæ chorda illa referri,
Et numeris poterit quævis proportio reddi:
Sicque, Sonos inter Numeroſque, videbitur aptè
Diſcrimen quodnam ſit, Convenientia quanta.

CAPUT II.

Quid & quotuplex Muſica, quidve & quot ſint Syſtemata, Intervalla & Soni.

MUSICA Cantandi Ars, Componendique Magiſtra,
Harmonice Græcis, modulata ſcientia nobis,
Singula pro Cantu pendit momenta ſonorum,
Edere quos vox humana Inſtrumentaque poſſunt.
Clauduntur quicumque ſoni ſpatio octo ſonorum;
Ultra hos quotquot ſint, horum repetitio tantùm:
Dicitur hoc ſpatium Octava, aut Græcé Diapaſon.
Cumque ſit ipſe ſoni Octavus repetitio primi,
Omnibus his ſeptem tantummodò nomina dantur,
Queis affiguntur Claves, ſeu Grammata ſeptem,
(Eſt alibi penitùs diverſa acceptio Clavis)
Ex quibus Harmonicæ Scalæ dedit ultima nomen,
Nomen famoſum, Græcorum Gamma vocatum.
En Claves & reſpondentia nomina Vocum,
Verſibus imparibus, Capitalibus utraque ſculpta,
Zacharias mutus quos pectore fudit ab imo,
Præſcius hæc ſumenda olim ex Nati ipſius Hymno:
Corde Deum Et Fidibus Gemituque Alto Benedicam,
UT RE MI FA*ciat* SOL*vere* LA*bra* S*ibj*.
Sufficiuntque quibuſve ſonis hæc nomina ſeptem.

Hosque sonos dixere Tonos modò, Semitonosque;
Quin etiam Antiqui ex illis fecêre quadrantes.
Cantandi triplex Genus hinc, & Musica triplex:
Prima Tonis & Semitonis procedit; in illa
Quinque Toni & duo Semitoni, sed utrique seorsim,
Octavam faciunt; Naturalis facilisque
Cantandi via, & incultæ cuique insita genti.
Altera semitonis facit Octavam duodenis,
Chromatica appellata. Quadrantibus ultima complet
Octavam quatuor supra viginti, at ab usu
Seposita; hanc & Enarmonicam, Harmoniamve vocarunt.
Ex tribus his mixtum componere possumus unum:
Nam nec Chromaticum purum, nec Enarmonicum unquam
Constitit; at purum poterit consistere primum.
Hæc aptata tenent proprio in Systemate sedem.
SYSTEMA est duplicis generis, majusve, minusve.
Est Magnum, Complexio quorumcumque sonorum;
Antiqui Systema hoc ad Quintamdecimam usque;
Ad Triginta unumque sonos protendere, vel vox
Humana in pueris que virisque, aut Organa possunt.
In triginta unoque sonis his, Semitoni octo,
Vigintique duo Toni; & hos Octava quadruplex
Cum Terna majore, suo Systemate claudit.
Parvum est, quod quædam complectitur Intervalla.
Intervallum est, binorum rata meta sonorum.
Est Sonus, unius finitæ Tensio vocis;
Tensio, quæ tasis est Græcis, statioque Latinis.
Hîc Vox est, sonitus quicumque fit aëre moto,
Seu flatu, plectro, digitis, pulmone, vel ictu;
In folle aut calamis, in chordis, gutture & ære,
Quà data porta ruente aut clauso carcere Vento;
Nil sed in Harmonicis inclusus carcere Ventus.
Intervallum aliud Symphonum, aliud Diaphonum,
Mixtum aliud, cui dant etiam inter Consona sedem.
Consona in harmonicis hæc Intervalla vocantur;
Unisonus, seu vocibus in variis sonus idem;
Tertia vel minor aut major; Diapente, Latiné
Quinta; duæ mixtæ sunt, Quartaque, Sextaque major

Vel minor; Octava aut Diapaſon omnia complet.
Omnem namque ſonum hoc complectitur Intervallum.
Ex primis his ſunt compoſta ſequentia quævis:
Sic Decima, Undecima, ac Duodena, & Diſdiapaſon,
Primorum Intervallorum repetitio tantùm.
Diſſona ſunt quæcumque iſtis non annumerantur.

CAPUT III.

De Comparatione & varia diſpoſitione Numerorum & Sonorum; ac de differentia inter Proportiones & Fractiones.

MUlta Sonos certé & Numeros communia habere
Non Veteres modò, ſed te noſtra loquela docebit;
Nam numeris ſemper damus Intervalla ſonorum,
Exprimimuſque etiam numeris; dicenda docebunt
Quanta ſoni & numeri inter ſe commercia jungant.
In numeris quando inque ſonis Proportio ſtabit,
Tunc poſtponuntur vel ſupponuntur utrique,
Sive minor ſupponatur, ſeu major, idem fit;
Hoc quod in harmonicis vox in grave, vox in acutum;
Semper idem manet Intervallum, eſt & ſonus idem;
Eſt tantùm varia ad majorem habitudo minoris;
Sed nihil in re mutatur, res ſemper eædem:
Acclivis via, declivíſque, eadem via ſemper.
Haud ita res eſt in Fractis; nam Fractio multùm
Et Ratio diſtant, ut poſthàc multa probabunt.
In Rationibus, haud unquam numerus numeri eſt pars;
In Fractis, numerus, numeri partes erit, aut pars;
Integer hîc numquam; Integri illic ſemper utrique:
Ut ſecernantur, nulla illos lineola inter.
Ergo dupla eſt eadem Ratio, quæ ſubdupla nobis:
Vox in acutum ac in grave idem facit Intervallum.

Sic 1 ad 2, vel 2 ad 1 | 2 ad 3: vel 3 ad 2 |
vel $\frac{1}{2}$ aut $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{3}$ aut $\frac{3}{2}$ | idem eſt in
Harmonicis & in Proportionibus. Non autem in Fractionibus.

CAPUT

CAPUT IV.

In qua ſint ratione Soni & Intervalla Conſona ac Mixta.

UNiſonus Rationem habet æquam, unius ad unum.
1. ad 1 |
In dupla ratione eſt Octava; ut duo ad unum.
2 ad 1. |
Vicinos ambit numeros, triaque & duo, Quinta.
3 ad 2 |
Quarta, tria & quatuor: quatuor cum quinque prehendit
Tertia quæ major: quinque & ſex, Tertia ſumit
Quæ minor eſt; numeris ſejungitur utraque Sexta;
Major habet tria cum quinque; at quinque altera, & octo.
In tripla ratione eſt Quinta ſuperdiapaſon
Seu Duodena; eſt in quadrupla Diſdiapaſon:
Et duplant numeros, Octavæ quæque ſequentes.
Diſſona non gaudent certis Rationibus ullis.
Semitonuſque, Tonuſque modò majore, minore
Donantur ratione, & cætera Diſſona, ut hîc eſt.
Si unicus eſt Tonus, in ſuper-octava ratione eſt.
Quando duo; in ſuper-octava hic, ille in ſupra-nona.
Semitoni ſic; in ſupra-quinta-decima unus;
Quando duo; ſupra-quartus-vigeſimus alter:
Hîc ſequimur communem uſumque modumque loquendi;
Namque vias nos ipſi alias tentabimus infrà.
Cætera Diſſona ſic variis Rationibus inſtant.

Numeri Rationum Intervallorum.

Uniſonus, 1 ad 1 | Octava 1 ad 2 | Quinta 2 ad 3 |
Quarta 3 ad 4 | Tertia major 4 ad 5 | Tertia minor 5 ad 6 |
Sexta maj. 3 ad 5 | Sexta min. 5 ad 8 | Duodecima 3 ad 1 |
Diſdiapaſon 4 ad 1 | Vigeſima ſecunda 8 ad 1. |
Vigeſima nona 16 ad 1. &c.
Tonus vel 9 ad 8 ; vel 10. ad 9 | Semitonus vel 16 ad 15 | vel 25 ad 24,
ut Theoricis viſum eſt, de quibus infrà.

CAPUT V.

Divisio chordæ in quasuis partes ope numerorum.

UT possis chordam omnem in partes quasque secare:
Oblatam, semel in triginta minuta secabis:
Hujus ope numeri partem assignabis in illa
Qualemcumque voles: vis majorem? duplicato,
Aut quovis ductu numerum illum multiplicato:
Est facile in chorda partes dare quasque petitas,
In partes quando has numerum diviseris illum.

Sic divisimus chordam in Monochordo per 30 per 360 & per 1440.

UTILISSIMA METHODUS

Dividendi datum quemlibet numerum aut chordam quamcumque in petitas proportiones.

HAnc Algebra docet methodum: Nos te tamen istam
Absque illa, facilique novaque docebimus arte.
Junge simul numeros Rationum; hac divide summâ
Oblatum numerum: Quotiens dabiturque petitis
Partibus, in sese quot quævis continet unum:
Hoc est, per numeros Rationum is multiplicetur.
Hæc aliis verbis tibi tradita Regula supra est.

Ex. I.

Sidetur numerus 369 dividendus in partes quæ faciant Diapason cujus ratio 2 ad 1. Per summam 3 divide 369 veniet in quotiente 123, qui semel pro 1. & bis ponetur pro 2 scilicet 246, qui ad 123 est in ratione dupla 2 ad 1. hique duo numeri 123 & 246 restituunt 369.

Ex. II.

Sic 360 dividendus in partes quæ faciant diapente 3 ad 2: per summam 5 divisus dabit in quotiente 72; qui bis dat pro 2, 144. terque pro 3 dat 216, qui ad 144 in ratione 3 ad 2.

Ex. III.

Idem 360 dividendus in rationem sextæ majoris 5 ad 3 per summam 8 dat 45; qui ter facit pro 3, 135 & quinquies pro 5 dat 225.

Ex. IV.

Idem 360 pro ratione Toni primi 9 ad 8 cujus summa 17, venit in quotiente 21 $\frac{3}{17}$ qui multiplicatus per 9 & 8, dat 190 $\frac{10}{17}$ pro 9 & 169 $\frac{7}{17}$ pro 8, qui restituunt numerum 360.

Si vis ut capiant melos aures; divide chordam
In partes, velut ipsa foret numerus datus; & tot,
In numero partes quot cuivis contigit, huic da.
Harmonias quamvis multas chorda accipit una,
In chorda tantùm binas audire facultas:
Tres simul audiri non possunt chorda in eadem;
Per magadem at successivo ordine quæque dabuntur.

CAPUT VI.

Methodus inveniendi in Monochordo, sonos per rationes & rationes per Intervalla.

HAc facili methodo, cuncta Intervalla dabuntur,
Instrumenti ope, quod Monochordi nomine notum est.
Junge simul numeros rationum, chorda secetur
In partes tot, quot summa in se continet unum:
Majorem numerum pone hinc, illincque minorem,
Atque operâ Magadis sonus eliciatur utrinque;
Major chorda gravem, minor inde sonabit acutum.

Unisonus cujus ratio 1. ad 1.

Unisonus dabitur, medio si chorda secetur;
Hinc illinc sonat unisonum; ad vacuam diapason.

Octava seu diapason cujus ratio 1 ad 2.

Octavæ summa est tria; per tria divide chordam:
Pone duo hinc, pone unum illinc, Octava sonabit.

Diapente seu quinta cujus ratio 2 ad 3.

In Quintæ summâ, quinque; in tot divide Chordam;
Pone duo hinc, illinc tria; Quinta sonabit utrinque.

Diatessaron seu quarta cujus ratio 3 ad 4.

In Quartæ summâ, septem; in tot divide Chordam;
Pone tria hinc, illinc quatuor; tibi Quarta sonabit.

Ditonus seu tertia major cujus ratio 4 ad 5.

Tertia major, habet novem; & has chorda accipe partes;
Da quatuor da quinque; sonabit Tertia major.

Semiditonus seu Tertia minor cujus ratio 5 ad 6.

Tertia sed minor, undecim habet; tot chorda prehendat:
Det Magas hinc sex, quinque illinc; minor illa sonabit.

Hexachordum majus seu sexta major, 3 ad 5.

In Sexta majore, octo, in tot divide Chordam;
Pone illinc tria, quinque hinc; major Sexta sonabit.

Hexachordum minus seu Sexta minor 5 ad 8.

Sexta minor tredecim tenet, has chorda accipe partes:
Det Magas hinc quinque, octo illinc, minor illa sonabit.

Quinta superdiapason seu Duodecima 1 ad 3.

Quattuor est summa in Duodena; has accipe partes
Chorda; tria hinc, illinc da unum, Duodena sonabit.

Disdiapason seu Quindecima aut duplex octava 1 ad 4.

Sunt in Quindecima, quinque; in tot divide Chordam;
Quattuor hinc pone, unum illinc; en Disdiapason.

Trisdiapason seu Vigesima secunda, aut triplex octava 1 ad 8.

In triplici Octavâ, novem; & in tot divide chordam;
Hinc unum pone, octo illinc; en Trisdiapason.

Tetradiapason seu vigesima nona, aut quadruplex octava 1 ad 16.

Sunt septemdecim in Octava quadruplice; chorda
Tot partes habeat; pone unam hinc, sexdecim & illinc;
Quadruplicem Octavam, ad partem hanc, pars illa sonabit.
Cætera sic venient, Rationes dummodó noscas;
Nescius harmoniæ, harmonica Intervalla creabis.
Numquid & is qui Musicus, haud Geometra fiet?

CAPUT VII.

Musicus absque ope circini aut amussis, per Sonos, quascumque assignabit chordæ partes & divisiones.

HAc methodo, si Musicus es, Geometra fies.
Musicæ ope, chordam in partes quascumque secabis;
Quin dabis in chorda Rationem quamque petitam,
Circini ope absque ulla, nec te ulla juvabit amussis,
In chorda dederis quando Intervalla petita.
Sic tales chordæ partes jurabis adesse,
Hinc illinc variè aut æquè Magade interceptas.
Unisonum sonat hinc illinc; chordæ medium ergo.
Octavam sonat hinc illinc; chordæ ergo triens hoc;
Seu binas illinc partes chorda, hinc habet unam.

Cætera Musicæ ope, chordæ segmenta petita,
Nota tibi si sit Ratio, jurabis adesse.
Ergo Per Harmoniam facilé Geometra fies :
Chordometra hîc nobis Geometra dicitur esse.

CAPUT VIII.

Alius modus inveniendi Sonos illorumque Genesim & rationes, per trinam comparationem, tùm utrorumque sonorum ejusdem chordæ ad invicem; tum utriusque ad chordam liberam seu vacuam, id est, in unisono positam ad primum liberum sonum chordæ.

SIc aliter poteris quæque Intervalla tenere,
Complexu Octavæ unius contenta sub uno.

Unisonus. 1 ad 1.

Chordæ si tensæ fuerint æqualiter ambæ,
Ad vacuam vacua, unisonum utraque chorda sonabit :
Ex indivisa sonus unicus elicietur.

Octava ad vacuam 1. ad 2, dat utrinque unisonum 1. ad 1.

Ad vacuam sonat Octavam, si chorda secetur
Per medium ; Unisonus simul hinc auditur & illinc.

Quinta ad vacuam 2 ad 3, dat utrinque Octavam 2 ad 1, & Duodenam ad vacuam ex parte minori, 1 ad 3.

In tres æquales partes si chorda secetur ;
Hincque duæ partes, illinc ponatur & una:
Utrinque Octavam ; ad vacuam Diapente sonabit
Major, & ad vacuam dat chorda minor Duodenam.

Quarta ad vacuam 3 ad 4, dat utrinque Duodecimam 3 ad 1, & Disdiapason minor ad vacuam, 1 ad 4.

In quatuor partes si chorda secetur ; & hinc tres
Cum vacua Quartam; hinc illinc resonant Duodenam;
Illinc ad vacuam una sonabit Disdiapason.

Tertia major ad vacuam 4 ad 5, dat utrinque Disdiapason 4 ad 1, & minor Decimam septimam ad vacuam 1 ad 5.

Partes in quinas divisâ : hinc Tertia major,
Ad vacuam, in quatuor ; sed utrinque est Disdiapason;
Ergo illinc Septemdecimam ; ad vacuam, una sonabit.

Tertia minor ad vacuam, 5 ad 6 ; dat utrinque Septemdecimam majorem, 5 ad 1, parsque minor ad vacuam dat Decimam nonam 1 ad 6.

In ſex ; hinc dant quinque minorem Tertiam ; utrinque
Majorem Septemdecimam , & Nonamdecimam illinc.

Sexta major ad vacuam , 3 ad 5 ; dat utrinque Quintam 3 ad 2 ; illinc ad vacuam , majorem Decimam , 2 ad 5.

Si ex quinque hinc tres , atque duæ illinc ; Sexta ſonabit
In tribus ad vacuam major : Diapente at utrinque :
Majorem Decimam , ad vacuam , binæque ſonabunt.

Sexta minor ad vacuam 5 ad 8 : utrinque majorem Sextam 5 ad 3 : illinc ad vacuam dat Undecimam 3 ad 8.

Ac tandem partes ſi chorda ſecetur in octo ;
Et quinque hinc ponas , tres illinc , quinque ſonabunt
Hinc minus Hexachordum , & majus utrinque ſonabit ;
Undecimam tres ad vacuam , quæ continet octo.

CAPUT IX.

De Inventione Diſſonorum Intervallorum.

IN Monochordo Intervalla invenienda ſuperſunt ,
Omnibus ex iis quæ Diapaſon continet in ſe ;
Semitonus , Tonus , & Tritonus ; tum Septima major
Aut minor ; Octavæ falſæ , Quintæque , minutæ ,
Aut excedentes ; poſtremùm Quarta minuta ;
Namque Superflua erit Tritonus , vel Quinta minuta :
Omnia Diſſona , nec certis rationibus ullis
Donantur , vel menſuris ; ſic Muſica monſtrat ,
Menſurâ ſemper vitium & Ratione carere.
Cuncta tamen propriis aptabimus Intervallis ,
Ne , quod conſtituat Diapaſon , quid tibi deſit.

Semitonus.

Semitonus dabitur primus , ſi in parte minore
Contra majorem , reſonet Vigeſima nona.

Tonus.

Fitque Tonus cùm Octava triplex auditur utrinque.

Quarta minuta.

Quarta minuta locum in ſyſtemate non habet ullum ;
Uni cuidam Intervallo eſtque relatio tantùm.

Tritonus.

Et Dabitur Tritonus, cùm Nona ſonabit utrinque;
Ad vacuam, hæc dat majorem Sextam duplicatam.

Quinta minuta & ſuperflua.

Quinta minuta loco, ac Tritonus, conſedet eodem;
Quinta ſuperflua, cum Sexta ſedetque minore,
Aut ſi quod diſcrimen erit, diſtantia parva eſt.

Septima major & minor.

Septima vel minor aut major, cum parte minore
Vix ullum ſervant Intervallum: Illa minuta,
Dat Quartam, iſta Tonum tantillo excedit utrinque.
Ergo coaptandæ, Quartis Quintiſque aliorum
Intervallorum, ſi vis proprio utraque conſtet.

De duobus aut tribus Tonis & Semitonis ſeſe proximé conſequentibus; & quæ ratio, quibuſve locis, iis conveniat.

QUando Toni duo vel tres haud rupto ordine deinceps
Succedunt ſibi, tunc ſeſe alternâ ratione
Vel ſuperoctavâ, aut ſupranonâ, aliâve ſecuntur.
Ex vario hoc poſitu numerorum ac ordine pendet;
Ut ſuperoctavâ hîc, quæ alibi ſupranona veniret.
Forſitan hinc bene, eamdem utramque probabitur eſſe.
Semitoni ſic ſe alterna ratione ſecuntur
Abſimili, ex poſitu modò majore atque minore.
Attamen in rationibus is ſervabitur ordo.
Per ſuperoctavam, à ſe Quarta & Quinta recedunt:
Tertia, ſed minor à Quarta exit per ſupranonam:
Per ſupraquindecimamque à Quarta, Tertia major:
Sexta minor per idem ſpatium Quintamque relinquit.
Ternam & Sextam utramque ſupra-vigeſima-quarta
Separat; atque Tonos ſupra octuageſima utroſque.

Semitonum & Tonum chorda dabit utrinque uno tantùm in loco.

SEmitonum atque Tonum chorda una ſonabit utrinque,
Sede unâ, verſus medium ſi chorda ſecetur.
Semitonus dabitur, ſi chordæ dentur utrinque, hinc
Octoginta novem, illinc nonagintaque & unum:

Si modò chorda habeat centum octogintaque partes:
Fiet idem, chordâ ac numeris utrisque duplatis.
Hinc septemque decemque, illincque novemque decemque
Si partes dentur, Tonus hinc utrinque sonabit.

CAPUT X.

De Compositione sive Additione aut Conjunctione Proportionum & Intervallorum Harmonicorum, in Arithmetica & Musica.

ADdere, vel Componere, seu Conjungere, idem hîc sunt.
Est duplex Componendi via: Comparat una
Extremos conjunctarum numeros Rationum;
Altera multiplicat, multasque reducit ad unam;
Est etenim Additio hîc, multorum adductio in unum:
Multiplica ergo Duces Ducibus, Comitesque seorsùm.
Alterutrâ methodo hîc Rationes addere mens est:
Perque sonos & per numeros faciemus utrumque.

Octava.

Octavam facit in Numeris Quarta addita Quintæ.

1°. modo 2, 3, 4 | 2 ad 3 quinta | 3 ad 4 quarta | 2 ad 4 Octava, per comparationem extremorum.

2°. modo 3 2 ratio quintæ
per multiplicationem 4 3 ratio quartæ
12 6 ratio octavæ
seu 2 1 in minimis terminis

Inque sonis facit Octavam, Quintæ addita Quarta,
út, sól, ut″ | út sól, quinta | sól, ut″, quarta | út ut″ octava.

Octavam major dat Tertia, Sexta minorque.

1°. modo 4, 5, 8, | 4 ad 5 tertia maj. | 5 ad 8 sexta min. | 4 ad 8 octava,

2°. modo 4 5 ratio 3. maj.
5 8 ratio sextæ minoris
20 40, ratio Octavæ
1 2 in minimis

In sonis út, mi′, ut″.

Tertia

Tertia dat minor Octavam, dat Sextaque major.

1°. modo 3, 5, 6 | 3 ad 5 sexta major | 5 ad 6 tertia min. | 3 ad 6. octa.

2°. modo 3 5 sexta maj.
5 6 tertia min.
15 30 Octava.
1 2 in minimis

In sonis út, lá, ut''.

Octavam faciunt Tonus, atque bis addita Quarta.

1°. modo 8, 9, 12, 16, | 8 ad 9 tonus | 9 ad 12 quarta | 12 ad 16 quart. | 8 ad 16 Octava

2°. modo 8 9 tonus
9 12 quarta
12 16 quarta
864, 1728 octava
1 2 in minimis.

In sonis fá, sól, ut'' fa''.

Quinta.

In numeris faciunt Quintam, utraque Tertia junctæ.

1°. modo 4, 5, 6, | 4 ad 5 tertia maj. | 5 ad 6 tertia min. | 4 ad 6 quinta.

2°. modo 4 5 tertia major
5 6 tertia minor
20 30 quinta
2 3 in minimis

Inque sonis faciunt Quintam utraque Tertia junctæ.
út mi' sól.

Procreat in numeris sic Quarta Tono addita Quintam.

1°. modo, 6, 8, 9 | 6 ad 8 quarta | 8 ad 9 Tonus | 6 ad 9 quinta

2°. modo 6 8 quarta
8 9 tonus
48 72 quinta
2 3 in minimis

Inque sonis Quintam generabunt Quarta Tonusque.
út fá sól.

Sexta minor.

Sexta minor fit & ex Quarta Ternaque minore.

1° modo, 5, 6, 8, | 5 ad 6. tertia minor | 6 ad 8 quarta | 5 ad 8 sexta minor.

2°. modo 5 6 tertia minor
6 8 quarta
30 48 sexta minor
5 8 in minimis

In sonis mi', sól, ut'', | mi' sól tertia min. | sól ut'' quarta | mi' ut'' sexta min.

Sexta major.

Sextam majorem dat Quarta & Tertia major.

1°. modo 3, 4, 5 | 3 ad 4 quarta | 4 ad 5 tertia major | 3 ad 5 ſexta major.
2°. modo 3 4 quarta
4 5 tertia major
12 20 ſexta major
3 5 in minimis.

In ſonis út, fá lá

Vndecima.

Undecimam faciunt Diapaſon Quartaque junctæ.

1°. modo 3, 6, 8, | 2°. modo 3 6 octava
6 8 quarta
18, 48 undecima
3 8 in minimis

In ſonis út, ut″, fa″.

Duodecima

Sic faciunt Duodenam Octavaque Quintaque junctæ

1°. modo 1, 2, 3, | 2°. modo 1 2 octava
2 3 quinta
2 6 duodecima
1 3 in minimis

In ſonis út, ut″, ſol″.

Diſdiapaſon.

Ex Quintâ, Quartâ, Octavâ fit Diſdiapaſon.

1°. modo 2, 3, 4, 8. | 2°. modo 2 3 quinta
3 4 quarta
4 8 octava
24 96 diſdiapaſon
1 4 in minimis

In ſonis út ſól ut″ ut‴.

Inter ſe ſic conveniunt, Numerique Sonique,
Chordæ non ita; quamquam hîc ſæpé Theoricus erret;
Nam licét in chorda quæque Intervalla petita
Succeſſivé habeas, ut demonſtravimus anté;
Illa tamen nequeunt componi chordâ in eadem:
Namque ſoni eſſe ſimul nequeunt tres. chordâ in eadem;
Ponticulis ni pluribus hæc intercipiatur.



CAPUT XI.

Per Compositionem Rationum Intervalla Cantui inepta redduntur apta.

EX illa methodo componendi Rationes,
Cantibus exoritur noſtris mirabile quiddam;
Ut, qui ſunt numeri in Rationibus interrupti,
Quique ob id haud facilé Cantus admittere poſſunt,
Per medios numeros reddantur Cantibus apti.
Hinc clarum eſt; Intervallum harmonicum omne, niſi ſint
Contigui numeri Rationum, haud Cantibus aptum.
Contigui hi ſunt, queis monas eſt diſtantia ſola,
Aut quibus ad tales conceſſum eſt poſſe reduci.
Hi non contigui, quibus interruptio quædam eſt;
Hiſque opus eſt mediis, ut fiant Cantibus apti.
Conjungunt mediæ ſic Quarta & Tertia major,
Sextam majorem, numeris priùs interruptam,
Cantibus Harmoniciſque idcircò prorſùs ineptam.
Sic etiam Duodenam Octavaque Quintaque jungunt.
Sic reliquas intermediæ dant Cantibus aptas.
Hinc etiam clarum eſt; multis non eſſe neceſſum
Conjungi, in numeris quibus interruptio nulla;
Tertia ſic minor aut major, Quarta & Diapente,
Ac Octava, quibus monas eſt diſtantia ſola
In numeris Rationum, aliis haud jungier optant.

Sexta major 3 ad 5 : ſic componitur, 3, 4, 5 id eſt út fá lá
Sexta minor 5 ad 8 : ſic conjungitur 5, 6, 8 id eſt mi′ ſól ut″
Duodecima 1 ad 3 : ſic conjungitur 1, 2, 3 id eſt út ut″ ſol″
Diſdiapaſon 1 ad 4 : ſic componitur 1, 2, 3, 4 út ut″ ſol″ ut‴

Intervalla in contiguis numeris	octava	5^a.	[illegible]^a.	3^a. major	3^a. minor	Tonus	
	1, 2	2, 3	3, 4	4, 5	5, 6	8, 9	&c.

CAPUT XII.

De duplici genere Intervallorum haud Cantui aptorum.

SUnt duplici in genere Intervalla haud Cantibus apta:
Prima locum ſuum habent Magno in Syſtemate; & illa
Simplicia aut Compoſta; aut Conſona, Diſſona, Mixta.
Illis contigui numeri in Rationibus haud ſunt;
Hæcque intermediis redduntur Cantibus apta.

	Mixta.			Conſona.	
	6ª. major	6ª. minor	undecima	duodecima	quindecima
	3 5	5 8	3 8	1 3	1 4
Intermediat	4	6	6	2	2, 3
	út lá	mi′ ut″	út fa″	út ſol″	út ut‴
	fá	ſól	ut″	ut″	ut″ ſol″

Diſſona.

Tritonus	falſa 5ª dimin.	falſa 5ª ſuperflua
7 10	12 17	16 25
8	16	24
út *fá*	mi′ b ſi′	ùt, *ſól*
fá	lá	ſól

Altera at Intervalla, à Græcis ecmela dicta,
Nobis abſona, habent nullam in Syſtemate ſedem.
Hæc falſæ voces faciunt, cum juſta ſonorum
Intervalla haud attingunt: Rationibus illa,
Sedibus ut nullis gaudent, haud cantibus apta;
Peſſima in harmonicis, fugienda, aptandaque numquam.
Non his annumeramus Enarmonica illa minora
Intervalla, quibus Magno in Syſtemate ſedes
Et Ratio eſſe poteſt; quæ quamquàm tempore longo
Antiquata, queunt revocari priſtinum ad uſum.

CAPUT XIII.

De Subtractione Proportionum, seu de modo cognoscendi quanto excessu unum Intervallum aliud superet, tàm in Arithmetica quàm in Musica.

EXcessum si scire velis quo Quinta recedit
A Quarta; vel ab alterutra quantùm Diapason;
Immò aliud quodvis quantùm à quocumque recedit:
Primos pone horum numeros, ut in Additione;
Transverso at crucis in formam ordine, multiplicato,
Scilicet, hunc Comitem alterius Duce; dein vîce versa,
Alterius Comite hunc Ducem; & hæc Subtractio dicta est:
Nam fiat licét hæc operatio multiplicando,
Ac quamvis numeri tibi majores uideantur,
Revera, tamen hi sunt in ratione minores,
Sed contrà venit in præcedenti Additione,
In qua etiam numeri, at verso ordine multiplicantur;
Major ibi, semper minor est productus in ista:
Majores ibi per majores multiplicantur,
Per minimos minimi, hinc major Ratio venit inde:
Ast hîc per minimos, majores multiplicantur,
Et minimi per majores: Ratio hincque minor fit:
Namque ibi vera est Additio, hîc Subtractio vera:
Additio hîc, Fractorum est multiplicatio vera.

Exemplum.

3 X 2 si à quinta tollas quartam.
4 X 3
restat 9 8 tonus

1 X 2 si ab octava tollas quintam.
2 X 3
2 4 quarta

1 X 2 si ab octava tollas quartam.
3 X 4
4 6 quinta in minimis 2 3

Tonus, vel 9 8 vel 10 9

si hunc 9 X 8
ab alio 10 X 9
restat 81 80

Semitonus. vel 16 15 vel 25 24

16 X 15
25 X 24
384, 375.

Multiplicationis & Divisionis nullus usus in Musica.

MUltiplicatio in Harmonica, & Divisio nullum
Usum, ad eam qui pertineat, censentur habere.
Poni etenim toties, in multiplicante quot unum est;
Aut excedit in harmonia, vel inutile prorsùs.
Si ergo Multiplicatio, & est Divisio nulla.

Sic multiplicare duas aut tres quintas est ponere bis vel ter illas, & dividere est retrahere bis vel ter illas, quod nulli usui est in Musica.

CAPUT XIV.

De Præstantia Senarij in harmonia & de Circulo aut Systemate generali Harmonico.

O! Quantis, inter numeros præstantior omnes,
Dotibus harmonicis fulget Senarius unus!
Nil nisi perfecté harmonicum complectitur in se;
Harmoniasque omnes propriis amplectitur ulnis,
Octo si addideris: quinque, & sex, octo, decemque
Si duplices, totum Harmonicum Systema replebis,
Quod numero quinquaginta quinque harmoniarum est.
Contiguis igitur numeris Senarius unus,
Octavam, Quintam, Quartam, dein Tertiam utramque;
Includitque interruptis, binas Duodenas,
Octavasque duas, Quintam, tum Disdiapason,
Sextam majorem, Ditonum supra Diapason,
Cum Ditono duplicem Octavam, Diapenteque supra
Octavam duplicem; harmonias complectitur unus,
Quindecim ad usque, soni quamvis tantùm numero Sex.

Ex his Sex numeris aut sonis 1, 2, 3, 4, 5, 6.

In contiguis,

octava,	quinta	quarta	3ª. major	3ª. minor
1, 2,	2 3	3 4	4 5	5 6

In interruptis,

duodecima	duodecima	octava	octava	quinta	disdiapason
1, 3,	2, 6,	2, 4,	3, 6,	4, 6,	1, 4,

6a. major	ditonus supra diapason	ditonus supra disdiapason	quinta super disdiapason
3, 5,	2, 5,	1, 5,	1, 6.

Sextam constituunt octo cum quinque minorem.
Consona tum reliqui nova, tum repetita reponunt,
Scilicet ex quinque, & sex, octo, decemque duplatis.
Et quamvis series sit tantùm undena sonorum,
Est numerus quinquaginta quinque harmoniarum,
Si ergo simul chordæ aut voces decem & una sonarent,
Dispositæ numeris quos circulus exhibet iste;
Quantâ hic impleret dulcedine Circulus aures!

VERTE



Ex undecim his numeris aut sonis, simul resonantibus:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, fiunt 55 harmoniæ.

octava	5^{a}.	4^{a}.	3^{a}. maj.	3^{a}. min.
1, 2,	2, 3,	3, 4,	4, 5,	5, 6,

12^{a}.	15^{a}.	17^{a}. maj.	19^{a}.	22^{a}.	24^{a}. maj.	26^{a}.	29^{a}.	31^{a} maj.
1, 3,	1, 4,	1, 5,	1, 6,	1, 8,	1, 10,	1, 12,	1, 16,	1, 0,

octava	10^{a}. maj.	12^{a}.	15^{a}.	17^{a}. maj.	19^{a}.	22^{a}.	24^{a}. maj.
2, 4,	2, 5,	2, 6,	2, 8,	2, 10,	2, 12,	2, 16,	2, 20.

6^{a}. maj.	8^{a}.	11^{a}.	13^{a}. maj.	15^{a}.	18^{a}.	20^{a}. maj.
3, 5,	4, 8,	3, 8,	3, 10,	3, 12,	3, 16,	3, 20,

quinta	8^{a}.	10^{a}. maj.	12^{a}.	15^{a}.	17^{a}. maj.
4, 6,	4, 8,	4, 10,	4, 12,	4, 16,	4, 20,

6^{a}. minor.	8^{a}.	10^{a}. min.	13^{a}. min.	15^{a}.
5, 8,	5, 10,	5, 12,	5, 16,	5, 20,

quarta	6^{a}. maj.	8^{a}.	11^{a}.	13^{a}. maj.
6, 8,	6, 10,	6, 12,	6, 16,	6, 20,

3^{a}. maj.	5^{a}.	8^{a}.	10^{a}. maj.
8, 10,	8, 12,	8, 16,	8, 20,

3^{a}. minor	6^{a}. minor	8^{a}.
10, 12,	10, 16,	10, 20,

quarta	6^{a}. maj.
12, 16,	12, 20,

3^{a}. major
16, 20,

CAPUT XV.

Mirabile Commercium & Concordia Numerorum & Sonorum.

TAnta Soni & Numeri inter se Commercia jungunt,
Ut dubites, an de Numeris sit Musica nata,
Illorumne parens; adeò est Concordia mira.
Exemplis magis hæc quàm verbis clara patescent.
Naturam certé, (si Natura in Numeris est,

In

Typus concordiæ Numerorum et Sonorum.

Rapports merveilleux des Proportions doubles des Nombres, avec les Intervalles des Sons de la Musique disposez d'Octave en Octave.

Proport. doubles.

Octaves vuides.

1, 2.

2, 3, 4.

3, 4, 5, 6.

4, 5, 6, 8.

5, 6, 8, 9, 10.

6, 8, 9, 10, 12.

8, 9, 10, 12, 15, 16.

9, 10, 12. 15. 16, 18.

10, 12, 15, 16, 18, 20.

12, 15, 16. 18, 20, 24.

15. 16. 18, 20, 24, 27, 30.

16, 18, 20, 24, 27, 30, 32.

18, 20. 24 27, 30, 32, 36.

20, 24, 27, 30, 32, 36, 40.

24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48.

27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 54.

Octaves pleines.

30, 32, 36, 40, 45, 48, 54, 60.

32, 36, 40, 45, 48, 54, 60, 64.

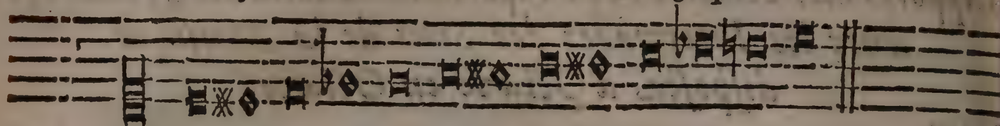
36, 40, 45, 48, 54, 60, 64, 72.

40, 45, 48, 54, 60, 64, 72, 80.

45, 48, 54, 60, 64, 72, 80, 90.

48, 96.

Octave Diatonique-Chromatique marquée par les Notes de la Musique.



Intervalles ou distances des Sons de la Musique, trouvez par le moyen du MONOCHORDE,

Sur une chorde de deux pieds & demy.

Le premier Son est sur la Chorde à vuide, & l'Octave de ce premier Son est sur le milieu de la Chorde qui fait l'Unisson de part & d'autre.

Les Sections ou partages de la Chorde sont marquées par des nombres qui vont en montant ou en descendant, & qui marquent toujours les mesmes proportions.

VT	♯	RÉ	♭ M
48	51	54	
1440.	1360.	1280.	120

♭ MI	MI	FA	♯	SO
57	60	64	68	72
1200.	1152.	1080.	1008.	960

SOL	♯	LA	♭ SI	♮ SI	V
72	76	80	85	90	9
960	912	864	816	768	72

La seconde Octave est depuis la moitié de la Chorde jusqu'au quart, avec les mesmes proportions dans les nombres.

vt	♯	ré	♭ mi	mi	fa	♯	sol	♯	la	♭ si	♮ si	vt
96,	102,	108,	114,	120,	128,	136,	144,	152,	160,	170,	180,	192.
720,	680,	640,	600,	576,	540,	504,	480,	456,	432,	408,	384,	360.

La troisiéme Octave est depuis le quart jusqu'au demy quart de la Chorde.

vt	♯	ré	♭ mi	mi	fa	♯	sol	♯	la	♭ si	♮ si	vt
192,	204,	216,	228,	240,	256,	272,	288,	304,	320,	340,	360,	384.
360,	340,	320,	300,	388,	270,	252,	240,	228,	216,	204,	192,	180.

La quatriéme Octave est depuis le demy quart jusqu'au seiziéme de la Chorde.

vt	♯	ré	♭ mi	mi	fa	♯	sol	♯	la	♭ si	♮ si	vt
384,	408,	432,	456,	480,	512,	544,	576,	608,	640,	680,	720,	768.
180,	170,	160,	150,	144,	135,	126,	120,	114,	108,	102,	96,	90.

In noſtris qualem eſſe Sonis monſtravimus anté,)
Quaſque per Octavas ſic diſpoſuiſſe videtur
In ratione dupla Numeros, ut conſtet eamdem
Eſſe viam in Numeris Intervalliſque Sonorum:
Hæc magis Exemplis quàm ſunt ſermone probanda.
Et placet hîc Numeros notulis ſignare ſonorum,
Obmiſſis Numeris, Ratio quos nulla recepit,
Aut queis metrum ad ſex primos commune negatur,
Si monadem excipias numerum quæ dividit omnem:
Iis, inquam, obmiſſis, horum multiplicibuſque:
De Octavis generis primi hoc intellige tantùm.

Sic ſi aſſumantur 1, 2, 3, 4, 5, 6, & multipli 2, 3, 4, 5, 6, ſcilicet 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, &c. obmittanturque 7, 11, 13, &c. eorumque multipli 14, 22, &c. habebis omnes Octavas in ſonis Diatonici generis, & duplas rationes in ſex numeris primis eorumque multiplicibus.

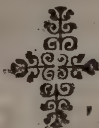
In ratione dupla Octavas tantùm eſſe memento,
Eſſeque ſimplicia & dupla idem, in Numeriſque Soniſque.
Octavæ ſunt in bina ſpecie; Incompletæ,
Quas intermedia Intervalla haud omnia complent.
Suntque decem quatuorque hujus primæ ſpeciei:
A monade ad duo, prima; à viginti, ultima ſumit
Principium, atque ad quadraginta extenditur uſque.
Completæ ſunt Octavæ, in quibus omnia plena
Sunt ſpatia, atque ſonis mediis vacuum haud datur ullum.
Prima à viginti quatuor ſe extendit ad uſque
Quadraginta octo, plené ſpatia omnia replens:
Et bené prima hæc dicetur Græcis Diapaſon.
Sic reliquæ, quæcumque ex ordine ponè ſecuntur,
A quacumque nota incipiant, ſpatia omnia replent,
Ac tandem poſt ſeptem expletas prima redibit,
Ipſius ſi conduplices Numeroſque Sonoſque;
Et reliquæ quæcumque ex ordine ponè redibunt,
Si præcedentum duplices Numeroſque Sonoſque.

VIDE TYPUM CONCORDIÆ
NUMERORUM ET SONORUM.

SIC Naturales Octavæ quæque ſequentur,
Quas primo proprias Generi aſſignavimus anté;

Q

Ut quæ quinque tonis seorsim, seorsimque duobus
Semitonis positis naturali ordine constent.
Sitque soni quamvis electio libera primi,
Mirandum tamen est numeros cæpisse sonosque
In chorda graviore; Tonos quoque Semitonosque,
In numerisque sonisque, pari ratione secutos,
Ac si suppetias hîc mensque manusque tulissent;
Ut non artis opus, sed naturæ, inde probetur.
Est quoque mirandum, Octavis quòd in omnibus, ante
Completas, nullus medius sonus inveniatur,
Qui possit Tritonum aut falsum Diapente creare.
Nec moveat te quod fuerit mutatio facta,
In numeris quando ad Completas transitio acta est
Ex Incompletis; nam sicut diximus anté
Res erit una, eadem quando Proportio stabit,
Seu fuerint numeri majores, sive minores.
At, quæ prima fuit Completa Octava, suâ nos
Naturâ, ad tales numeros, non sponte, coegit,
Ob variam sedem binorum semitonorum:
Ut, non artis opus, sed naturæ, inde probetur.
Nec te turbet item, quòd quæ fuit Incompleta
Septima, fecerimus graviorem in Disdiapason:
Nam qui sive per Octavam, Quintam-decimamque,
Aut aliam quamvis Diapason, dispositi sunt
In ratione dupla, ídem sunt numerique sonique;
In ratione dupla numeri, idem in cantibus isti;
Inter res ut non sit convenientia major:
Idque nec ex hominum arbitrio, nec pendet ab arte.
Ut non artis opus, sed naturæ, esse probetur.



CAPUT XVI.

EXAMEN MVSICVM.

An revera tales ſint in ſonis Proportiones, quales in numeris; Et quantum ſit in Harmonicis Aurium judicium; ac de ARISTOXENI Practicorum Muſicorum Principis reſtituenda Gloria.

TAlibus interſe jungi numeroſque ſonoſque
Connubiis, docuit nos, non vibratio Chordæ,
Quam fortis tantùm mentis meditatio finxit:
Non Incus cum malleolis, aut pondera chordis
Appenſa, utraque falſa eſſe experientia monſtrat:
Nos docuit ſolùm in Monochordo ſectio chordæ.
Pythagoras prior invenit, Ptolomæus adauxit
Correxitve; alij ſcriptis retulêre fideles,
Doctorum in libris quidquid legêre priorum:
Nos, quaſi nulla foret prolata ſcientia, nulla
De Harmonicis Rationibus experientia facta,
Auris ad Examen numeroſque ſonoſque venire,
Judiciumque ſubire iterumque iterumque jubemus,
De Numeris nil ſolliciti niſi ab aure probatis.
Harmonicæ Praxi noſtræ hæc ſunt debita Jura,
Jura diu violata & ſpretæ injuria Praxis;
Spretæ non tàm injuria, quàm ignoratio Praxis:
Quam ſi Doctores illi Harmonici bené noſſent,
Nobile queis dedit ipſe Canon vel Regula nomen,
Numquam in Ariſtoxenum dicteria tanta tuliſſent,
Judicium quòd in Harmonica auribus omne dediſſet,
De numeris nil ſollicitus niſi ab aure probatis;
Nec rationis inops impunè dictus ab illis
Princeps hic & Cantorum Coryphæus abîſſet.
Tanto Doctori ergo feramus opemque manumque;
Reſtituatur Ariſtoxeno omnis honoſque decuſque,
Et meritos ferat alternâ nunc ſorte triumphos.

De Rationibus Sonorum inventis in Monochordo Cantûs operâ.

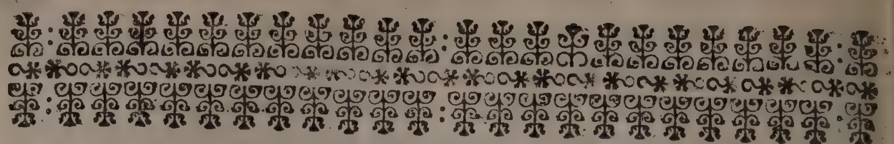
PEr magadem, duplici methodo, Numerosque Sonosque,
Illorumque simul genesim assignavimus antè.
In chorda rectà extensâ varièque recisa;
Aut sibimet vacuæ collata, aut parte ab utraque.
Nunc ad se numerosque sonosque referre voluntas,
Quales harmonici Cantûs invenimus arte;
Non quales Rationales reperêre sine aure.
Nec tantùm spatio hos Octavæ unius, ut antè,
Nec Naturalis tantùm; Systemate Magno
Sed quot habere est Chromatica Intervalla sonorum,
Semitonis quasque octavas complentia bis sex;
Auribus aut saltem poterunt quot sistere sese.
Talia sunt ergo exhibita Intervalla sonorum
Auris ope, in nostro Monochordo; sunt quoque tales
His respondentes numeri; tales Rationes,
Quas aptata sonis invenit sectio chordæ.
Hîc per majores numeros gradus ad minimos est:
Ex chordâ majore sonus gravis, exque minore
Altior; in vacua ergo gravissimus: & quia plures
Major habet partes chorda, hinc majoribus illa
Danda fuit numeris, qui per duplas rationes
Decrescent usque ad medium, medij ad mediumque,
Et semper medium Dupla ratione secabunt.
Ergo fit Octava ad vacuam in medio; inque quadrante
Octava ad medium; ad quadrantem, in semiquadrante;
Et semper medij ad medium, Octava altera surget,
Dum fient numeri in dupla ratione minores:
Ac quò chorda minor, sonus altior; atque minores
Semper erunt numeri, quoadusque sonum hauriat auris.
Hîc metas Natura dedit, neque enim auris, in immensum
Extensos audire sonos, nec reddere chordæ,
Aut voces poterunt: Certè est mirabile dictu
Quod nequeat quadruplam Octavam excedere chorda,
Hoc est, Sedecimæ parti medium haud datur ullum:
Vocibus & forsan meta est Vigesima nona.

Semitonusque prior nostris qui se auribus offert,
Ultra quem haud alius datur, est Vigesima nona,
Majorem ad partem quam pars minor altera profert;
Ut non Artis opus, sed Naturæ, esse putetur.
Hocque notandum est hîc, quòd Sectio, Tensio chordæ est:
Nam posito leviter magade, hæc ita tenditur, ac si
Claviculis multùm revoluta, aut pondere grandi
Tracta sit; & quò chorda minor, mage Tensio crescat,
Crescat ita, ut, si claviculis aut pondere ad illum
Tracta statum fuerit, fiat disruptio chordæ.
In variis chordis MONOCHORDI hæc omnia cerne;
Hasque in eo varias chordas cerne unius instar:
Fecimus hanc variam, ut meliùs Numerique Sonique
Auribus atque oculis, manibus, mentique darentur.
Perque Ascendentes Numeros potes in Monochordo
Cernere, quâ ratione in chorda Tensio crescat.
Quænam autem interse Numeros Proportio jungat,
Quæve Sonos Ratio, facilè est promptumque videre,
Communi metro ad minimos si quosque reducas.
Multùm his conveniunt quos invenêre Priores
Harmonici; nec cura est si quis distet ab illis,
De numeris haud solliciti nisi ab aure probatis.

VIDE MONOCHORDVM.

EX sic dispositis Numeris, quanta Organopæis,
Mechanicis, Fusoribus ac Numerantibus ipsis
Utilia adveniant, Te MUSICA nostra docebit,
Quam feror impatiens communem emittere in usum.





LIBER SEPTIMUS.

ARITHMETICA FIGURATORUM NUMERORUM.

CAPUT PRIMUM.

Quid & quot sint Figuræ Numerorum.



A Geometris Numerorum ſumpta Figura:
Hoſque Figuratos dixêre; quòd omnia poſſint
Menſuranda ſuis repræſentare figuris
Diſpoſiti Numeri in Longum, Latumque, Profundum.
Quod fluit, & nihil eſt, tamen à quo cætera, Punctum eſt:
Quod longum tantùm & non latum, Linea dicta eſt;
Quod latum, iſta Superficies eſt; quod que profundum,
Hoc Solidum dictum eſt: tribus iſtis Corpora conſtant,
Nec plures Numerorum Antiqui habuêre figuras.
In Geometria quod Punctum; unum in Numeris eſt:
Linea Radicique, Superficiesque Quadrato,
Reſpondet Solidumque Cubo; pluresque Vetuſti
Corporis & Numerorum haud agnovêre figuras.
Unum haud eſt Numerus; tamen omnia dicitur eſſe;
Eſt unum Radix, Quadratuſque, Cubuſque;
Et quodcumque aliud quantæcujuſque figuræ.
Linea reſpondet Radici, eſt Linea Radix.
Dicitur in Numeris Radix, quod multiplicans ſe
Vel ſemel, aut bis, terque, quater, creat inde Quadratum,
Atque Cubum, Quadrato quadratum, Surſolidumque;
Producti verò à duplâ Radice, Quadrati,
Atque Cubi, Quadratoquadrati Surſolidique.
Ergo ſemel Radix in ſeſe ducta, Quadratum;
Biſque, Cubum; Quadratoquadratum, ducta ter in ſe;

Surſolidumque creat quater in ſe multiplicata;
Sicque creare poteſt alias, aliaſque Figuras.
Per monades numeri has repræſentare Figuras
Diſpoſiti in longum poſſunt, latumque, profundum.

Figuræ Geometricæ.	*Figuræ Numerorum.*
Punctum	Unitas 1
Linea	Radix vel latus, ut 2,
Superficies	Quadratum, ut 4,
Solidum ſeu Corpus.	Cubus ut 8
&c.	&c.

CAPUT II.

Diſpoſitio Arithmeticæ progreſsionis & Geometricæ ac mutua illarum Collatio, moduſque inveniendi Figuras Numerorum per Radices.

A zero incipiens, numeros ex ordine ſcribe;
Hæc numeri Naturalis Progreſſio dicta eſt:
Tum Geometricos cujuſuis ſint rationis
Multiplicis, duplæ aut triplæ, incipientis ab uno
Diſpones, æquâ ſeſe ratione ſequentes.

Arith. progreſſ.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	&c.
Geometrica dupla	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	&c.
tripla	1,	3,	9,	27,	81,	243,	729,	2187,	6561,	19683,	&c.
		N.	R.	Q.	C.	qq.	S.	&c.			

Accipit inferior de ſupremo ordine nomen:
Hinc primus Geometricæ ſine nomine; & alter
Dicetur Radix; Quadratum Tertius; inde
Quartus erit Cubus, & quintus Quadratoquadratus;
Sextus erit Surdeſolidus, reliquique Priorum
Nomina ſubſumunt, horum duplicantque valorem,
Aut triplicant, ſimilique aliâ ratione reponunt.

Vide in Exemplo ſuprà.

Supremi exponunt numeri, quot in inferiori
Ordine Radices ſint in ſe multiplicatæ.

Exemplum proponatur duplæ Rationis,
Ut duo, cui quatuor ſupponitur, indicat eſſe
In quatuor poſitam bis Radicem : & tria, in octo
Ter poſitam, poſitam ter & in ſe ex ordine ductam.

Arith.	1. indicat	2. indicat	3. indicat	4. indicat.	&c.
	ſemel	bis poſitā	ter poſitam	quater poſitā	
	poſitam	ſic 2, 2,	2, 2, 2, &	2, 2, 2, 2	
Geom.	2. Radicem	4. id eſt 4	8. mutuò multipl.	16. unde fit	
			unde fit 8	16	

Prima autem Radix eſt, quæ denominat illam
Quam tibi proponis Rationem multiplicandam;
Ut duo, quæ duplam; tria, quæ triplam rationem.

Sic Arith. 0.	1. oſtendit quadruplam	1. quintuplam	1. ſextuplam
Geom. 1	4. eſſe rationem	5. eſſe	6. &c.

Quinetiam, binos ſi ſupremi ordinis addas,
Compones numerum, ſubtus quem ſubjacet ille,
Quem illis ſuppoſiti ſe multiplicando creabunt.

Ut ſi addas 2 ad 3 progreſſionis Arith. fiet 5; & multiplices 4 per 8 progr. Geom. qui jis ſubjacent fiet 32, qui ſub 5 eſt.

At ſi unus de alio retrahatur in ordine ſuprà,
Qui ſuberit Reliquo, veniet per Partitionem
Iis ſubjectorum per quos Subtractio facta eſt.

Ut ſi 4 de 6 ſubtrahas in progreſſ. Arith. remanebit 2. & ſi per 16 dividas 64 progreſſ. Geo. qui ſubjacent 4 & 6. veniet 4. qui ſub 2. eſt.

Vide cap. 13. lib. 5.

CAPUT III.

De Radice Quadrata moduſque cognoſcendi Quadrator ex ſola numeri inſpectione.

MUltiplicans ſeſe Radix Quadrata vocatur;
Productus verò Quadratus dicitur eſſe.
Radix eſſe poteſt, numerus quicumque, Quadrata;
Sed non idcircò numerus quicumque Quadratus.
I. Quadratus non eſt, cujus duo, vel tria, ſeptem,
Aut octo, vel cifra ſed impar, prima figura.

Quia in quadratis ultima debet eſſe una ex his, 1, 4, 5, 6. 9. 0,
At qui cifram innumero impare habent ut 460 | 768000 | 91010, quadrati non ſunt.

II.

II. Rejectoque novem quoties datur, inde nisi unum,
Aut quatuor, vel septem, aut tantùm cifra supersit.
III. In primâ si quinque, sequens binarius esto,
Et ponè hunc, vel par numerus, vel cifra sequatur.
Sic, 125 | 67525 | 89725 | 100925, quadrati non sunt.
IV. Si quis habet numerus pro prima, unumque, novemque,
Quadratus non est, nisi par, aut cifra sequatur.
Ut 4371 | 4379 | 67899 | 75351, quadrati non sunt.
V. Si in primâ quatuor; nisi par aut cifra sequatur:
Qui sequitur par, saltem æquus sit quattuor ipsi.
Sic 6934 | 70014, quadrati non sunt; nec 124.
VI. In primâ, sex; nî mox impar ponè sequatur.
Ut 5746 | 7086 | 34526, non sunt quadrati.
Fiunt quicumque Imparium additione Quadrati,
Præcedenti addendo impar quodcumque Quadrato:
Impariumque locus, Radix Quadrata tibi sit.
Ut 1. est primus quadratus. | ex 1 & 3 fit 4, secundus quadrat⁹ | tum addendo ad 4, 5, fit 9 q. tum ad 9 addendo 7 fit 16, q. | tum ad 16 addendo 9 fit 25, q. | & ad 25 add. 11, fit 36. q. &c.
Locus autem Imparium est Radix quadrata. Ut 3, qui est in secundo loco Imparium, (nam ibi 1 est primus impar) additus ad 1 facit 4; ergo Radix quadrata 4 est 2. | Sic 5 tertius impar additus ad 4 facit 9; ergò 3 est radix quadrata 9. | Sic 7, quartus impar, cum 9 faciens 16, ostendit 4 esse radicem 16. &c.
Quadrati unius distantia proximioris
Dupla est Radicis minimi, ac habet insuper unum.
Ut distantia 9 & 4 est 5, quod duplum est radicis 4 nempe 2 ac habet unum insuper.
Sic distantia 16 à 9 est 7, quod duplum radicis 9 nempè 3 & unum habet insuper.
Hinc minimi duplans Radicem ac insuper unum
Addens, compones quadratum proximiorem;
Productum adijcias si Quadrato inferiori.
Ut si duples radicem quadrati 16 nempè 4, ac insuper unum addas efficies 9 qui additus ad 16 componet 25 quadratum proximiorem.
In Radice Quadrati, unum est toties, quot & ipse
Imparibus constat Quadratus, perficiturque.
Ut radix 16 est 4, quia 16 quatuor imparibus constat, nempè, 1, 3, 5, 7. qui componunt 16.
Cùm fiant quique Imparium Additione Quadrati;
Imparium ut binarius est distantia semper,

Semper erit Quadratorum diſcrimen & impar.

Exemplum.

Radices.	Quadrati.	differentiæ.
1	1	.
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19
&c.	&c.	&c.

CAPUT IV.

De Radice Cubica & generatione Cubi.

FIT Cubus ex poſitâ ter & in ſe multiplicatâ
Radice; ut fit de binâ Radice Quadratus.

Ut ſicut ex 2, 2 fit quadratus 4 in dupla progreſſione, ita in eadem ex 2, 2, 2, fit Cubus 8. In tripla ex 3, 3, 3 fit Cubus 27. In quadrupla ex 4, 4, 4, fit Cubus 64. &c.

Quamquàm omnis numerus poſſit Radix Cubica eſſe,
Non ideò numerus quivis poterit Cubus eſſe.

I. Haud Cubus eſt, cùm octo, quatuor, duo, prima figura;
Ni penè hanc, vel par numerus, vel cifra ſequatur.

Ut 34532 | 456174 | 1100038, non ſunt Cubi.

II. Rejectoque novem quoties datur, inde niſi unum,
Aut octo maneant, vel cifra, nequit Cubus eſſe.

Sic 12000 non eſt Cubus quia 3 remanent.

III. Si quis habet numerus zero unum, vel duo zero,
Non poterit Cubus eſſe; poteſt ſi plura reponat.

Ut hi, 1230 | 100 | 34600 Cubi non ſunt: at 27000 Cubus eſt, &c.

IV. In prima ſi quinque, ſequens binarius eſto,
Aut ſeptem; haud aliter poterit numerus Cubus eſſe.

Ut 361035.|67895.|1120015, Cubi non ſunt, at 125 & 3375, Cubi ſunt.

In Cubicâ Radice, unum eſt toties, quot & ipſe

Imparibus constat Cubus : Aut, Cubus Imparibus tot
Perficitur generaturque, in Radice quot unum est;
Radicis nomenque tibi Imparium numerus dat.

Ut radix Cubi 27 est 3; quia 27 constat tribus imparib⁹ 7, 9, 11.
Talis autem ordo est Cuborum & generatio ab Imparibus.
1⁹ Cubus est 1. ex se genitus. 2⁹ est 8 ex 3 & 5, & ipsius radix Cubica 2.
3⁹ est 27, ex tribus sequentibus Imparibus, 7, 9, 11, genit⁹ & compositus; & radix Cubica 3.
4⁹ est 64 ex quatuor seq. Imparibus 13, 15, 17, 19, & radix ejus Cubica 4. &c.

Ductâ in quadratum Radice semel; Cubus hinc fit,

Ut ex 2 in 4 fit Cubus, 8. | ex 3 in 9, fit Cubus 27.

Nec pugnant inter se, quæ stabilivimus ante :
Ergo semel Radix in sese ducta, Quadratum;
Bisque, Cubum; Quadratoquadratum, ducta ter in se;
Sursolidumque creat quater in se multiplicata.
Non pugnant, inquam, & quæ paulò diximus ante :
Fit Cubus ex posita ter, & in se multiplicata.
Radice, ut fit de bina Radice Quadratus :
Radicem nam bis positam, aut ductam semel, unum est.
Et positam ter, & illam in sese multiplicatam;
Aut ductam semel in Quadratum; unum quoque, idemque.

Ergo idem sunt ex radice semel ductâ in se fieri quadratum, ut ex 2 in se fit 4, & bis positâ & ductâ in se, ut 2, 2, nempè ex 2 in 2 fit 4.

A B C ABC A B
Et idem, bis 2 in se, facit 8. & ter 2; ut 2, 2, 2, facit 8. nam 2 in 2,
AB C AB ABC
facit 4, & 2 in 4 facit 8 Cubum.

Ergo Cubi, per Quadratos Radicibus auctos;
Sive Cubi veniunt per Radicem positam ter;
Seu per Radicem bis per se multiplicatam.

Ut ex 2 radice in 4 quadratum, fit 8 Cubus :
Ex 2, 2, 2, fit 8, Cubus
Et ex 2 bis in se, fit Cubus scilicet ex 2 in se fit 4, & iterum ex 2 in se fit 4. id est 8.



CAPUT V.

De aliis Radicibus, Quadratoquadratis, Surdesolidis primis, Quadratocubis, Sursolidis secundis, Quadrato-quadrato-quadratis, Cubocubis, &c. eorumque procreatione.

Ex Radice quater positâ; ductove Quadrato
Bis per eam; aut Cubo in hanc semel, est Quadratoquadratus.

Ut ex 2, 2, 2, 2, in se mutuò fit 16, Quadratoquadratus : aut ex 2 in 4, & bis 2 in 4, fit etiam 16 : aut ex 2 in 8, fit 16.

Ex quinâ Radice in se, fit Sursolidusque.

Ut ex 2, 2, 2, 2, 2, fit 32. Sursolidus.

Ex senâ Radice in se, Quadratocubusque.

Ut ex, 2, 2, 2, 2, 2, 2, fit 64; Quadratocubus.

Ex septenâ in se fit, Sursolidusque secundus.

Ut ex, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, fit 128 Sursolidus secundus.

Ex octonâ in se, Quadrato-quadrato-quadratus.

Ut ex 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, fit 256. Quadrato-quad. quadratus.

Exque novena in se Radice Cubocubus exit.

Ut ex, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, fit Cubocubus 512.

Et sic crescendo à prima Radice creantur:
Aut per Radicem à vicino multiplicato.

Sic ex 32 per 2, fit 64 | ex 64 per 2 fit 128 | ex 128 per 2 fit 256, &c.

Nobis hæc Exempla dedit progressio dupla :
Tripla, Quadruplaque idem facit, ac progressio quævis.

Progress.											
Arith.	0,	2,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	&c.
	N.	Rad.	Qu.	Cub.	qq.	1us Surs.	qc.	2us Surs.	qqq.	cc.	&c.
Dupla	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	&c.
Tripla	1,	3,	19,	27,	81,	243,	729,	2187,	6561,	19683,	&c.
Quadrupl.	1,	4,	6,	64,	256,	1024,	4096,	16384,	65544,	262176,	&c.
Quintup.	1,	5,	25,	125,	&c.						

Primi, quos Naturalis Progressio format,
Exponunt numeri, quoties in quâque figura
Sit Radix; Exponentes ideòque vocantur.

Ut 4, indicat in qq. 16 vel 81, vel 243 positam esse quater radicem, & sic in reliquis.

CAPUT VI.

De Radicum Extractione in genere.

SI qua ex præmiſſis tibi multiplicatio reddat
Popoſitum quemvis numerum; is ſic multiplicatus
Dicetur Radix ejus qui reſtituetur.

Ut ſi proponatur 16, productus per 4 in ſe; 4 erit Radix quadrata 16: ſi productus per 2, 2, 2, 2; 2 erit Radix quadratoquadrata 16: quia 16 quadratoquadratus reſtituetur per radicem quadratoquadratam 2 quater poſitam quæ eſt multiplicatio quadratoquadrata.

Extrahere eſt ergo Radicem, quærere quænam
Propoſitum numerum tibi multiplicatio fecit.
Extrahere ergo potes quas enumeravimus antè,
Atque infinitas alias; ſi hæc prævia ſerves.
Propoſito quovis numero, à quo Extractio certa
Sit facienda; hunc pro varia Radice ſecabis,
A dextrâ incipiens, punctis ſegmenta notando.
A dextrâ puncto primam ſignato figuram
In quavis Radice: alias ac deinde figuras
Obmittens, ſic pro varia Radice notabis.
Versùs lævam in Quadratis obmittitur una;
In Cubicis binæ; Tres in Quadratoquadratis;
Sic aſcendendo plus prætermittitur una:
Ut tot in Extractâ veniant, quot puncta, figuræ;
Ac tot ſub punctis numeri, quot & ipſe trahendus
Pro radice ſuâ fuerit Radicibus auctus:
Ut quia Quadratus binâ Radice, Cubuſque
Trinâ, ſint aucti; binis ille, & tribus iſte.
Sic numeris intra quævis ſua puncta notentur.

Exemplum I.

Si proponatur Radix quadrata extrahenda ex hoc numero, 6765201 ſic punctis ſignabis omittens unam figuram, incipiens à dextra.

Ut ſub quoque puncto poſſint eſſe duæ ſicut ipſe Radice bis poſita factus eſt.

6765201

Exemplum II.

Extrahendæ Radicis Cubicæ, omittuntur 2. fig.

238328

Exemplum III.

Radicis Quadratoquadratæ, omittuntur 3. fig.

9476736

Exemplum IV.

Radicis Surdesolidæ, omittuntur 4. fig.

916132832

Et ſic de reliquis ſemper omittens unam plus aſcendendo.

CAPUT VII.

Extractio Radicis Quadratæ.

QUadratam Numeri Radicem educere ſi vis,
Propoſitum numerum in binos per puncta ſecato;
Ut tot Radices veniant quot puncta notata:
Hæcque nota à dextra; dein incipiendo ſiniſtrâ
Quænam ſit primi aut primorum quærito Radix:
Integra ſi non ſit ſume infrà proximiorem,
Hanc in ſimplicium Numerorum hoc ſchemate noſces.

Shema ſimplicium Numerorum.

Radices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quadrati	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Inventam primam Radicem, aut proximiorem,
In quotiente nota, ac numero ſubſcribito: deinde
Multiplicatam in ſe retrahas: Ipſum quotientem
Tum duplica, ac numero ſubſcribito, ut inde paretur
Partitione novus quotiens, quem poſt duplicatum
Adſcribes; taliſque ſit ille, ut cum duplicato
Ipſum per quotientem in ſeſe multiplicatus
A ſuprapoſito numero retrahatur: & ultrà
Si nondum acta eſt res; Totus quotiens duplicetur,

Ac numero ſubſcribatur, novus unde paretur
Partitionis ope quotiens, quem poſt duplicatum
Adſcribes; taliſque ſit ille, ut cum duplicato
Ipſum per quotientem in ſeſe multiplicatus
A ſuprapoſito numero retrahatur; idemque
Perpetuò fiat, videat dum operatio finem.

Exemplum.

1°. Proponatur Numerus 6765201 in quo ſunt quatuor puncta & ideò venient in radice quatuor figuræ.

2°. Incipiendo ſiniſtrâ, eſt unica figura 6, cujus radix eſt 2, ut poté infrà proximior radix 4, numero 6. In quotiente nota, ac Numero 6 ſubſcribe.

2
6765201 (2601, Radix quadrata numeri 6765201: nam
2465201 ipſa per ſe multiplicata eum reſtituet.

3°. Multiplicatum 2 in ſe ſcilicet 4 retrahe ex 6, remanent 2, & perfectum eſt primum punctum ſeu prima operatio.

4°. Duplica quotientem & fit 4 quem ſubſcribe numero 27. ſub. 7. & quære quotientem novum, habebis 6, quem pones in quotiente & poſt 4 ſub 6 ſecundi puncti.

5°. Fiat diviſio ſcilicet per quotientem novum 6 multiplicetur diviſor 46 & ſubtrahatur à ſuprapoſito 276 & nihil remanet, finitaque eſt ſecunda operatio.

6°. Quia nihil remanet in ſuprapoſito numero, ponetur zero in quotiente.

7°. Duplicetur totus quotiens 260, & fiet 520, qui ſemel continetur in ſuprapoſito ideoque ad quotientem & ad diviſorem adſcribitur 1 & facta multiplicatione & ſubtractione nihil remanet finitaque eſt tota operatio, & habetur 2601, pro Radice quadrata numeri 6765201.

Primâ Radice extractâ, cum zero ſuperſunt,
Punctorum ad numerum, zero in quotiente notentur.

Exemplum.

Ut extractâ primâ radice hujus numeri 4000000 quæ eſt 2, tria zero notabis in quotiente pro numero punctorum quæ ſuperſunt. (2000.

Cum ſupereſt aliquid, ſcito haud numerum eſſe quadratum:
Quiſnam ſit, vel non, Quadratus; diximus antè.

Exemplum.

Ut, extractâ radice ex hoc numero 6085 superest unitas, (78. 1 quæ denotat illum non esse quadratum.

Operatio.

11 1
6085 (78 1
7
148

Modus accedendi ad veram radicem in numeris non quadratis.

CUm superest aliquid, Radix numquam tibi vera,
Quidquid agas, dabitur: Tamen est modus hic propé ad illam
Accedendi. Ipsam primò inventam duplicato;
Et, si quod Reliquum, inventâ Radice minus sit,
Radicem tantùm duplica, nil adjiciendo:
At, si sit majus, tunc Radici duplicatæ
Unum addens, Reliquo subscribe; potire petito.

Exemplum I.

Ut si Radicem numeri 6085 priùs inventam 78 1 velis approximare veræ Radici; duplica ipsam Radicem 78 & fiet 156. & quia Reliquum 1 est minus ipsa radice 78, nihil addes duplicatæ radici 156; sed tantùm post radicem inventam, subscribes Reliquo 1 in modum fractionis, sic $78\frac{1}{156}$; & erit hæc priore proximior veræ Radici.

Exemplum II.

At si Extractam Radicem de numero 34, nempé 5, (quæ est tantùm radix numeri 25,) approximare velis veræ radici: quia reliquum 9 est majus ipsa radice 5, ideò duplicatæ radici 5 nempe 10 addes 1 & fiet 11, quod subscribes reliquo post inventam radicem sic $5\frac{9}{11}$.

Ecce aliam methodum, efficiendi proximiorem.
Proposito numero bina & bina addito zero;
Et quò plura addes, veniet mage proxima Radix
Radici veræ, quadrata exinde trahenda.
Ex tot zero aucto Radix quadrata trahatur;
Et si quid Reliqui superest, ut inutile linque:

Radicem

Radicem deinde inventam, duo si addita zero,
Divide per decem; at, addita si sint zero quaterna,
Per Centum; ac per mille, huic si sex addita zero:
In quotiente dabit Divisor proximiorem
Radici veræ Radicem exinde retractam;
Quò plura addideris, veniet mage proxima Radix.

Exemplum.

Ut si ad 34 addideris quatuor zero, sic 340000. veniet pro radice quadrata 583. & super est 111 quod ut inutile relinquendum. divide 583 per 100 quia quatuor addita sunt zero ad 34. quotiens erit $5\frac{83}{100}$; proximior quàm erat $5\frac{9}{11}$.

Paradoxum.

Si quadraginta addideris, tàm proxima veræ
Exiet hinc Radix; ut vix tenuiore capillo
Distet ab hac, licèt hæc Cæli impleret diametrum.

CAPUT VIII.

Extractio Radicis quadratæ in Numeris Fractis; & partim Integris, partim Fractis.

Quadratam si vis Radicem educere Fractam:
Ad minimos, Numeris, si Fractio magna, redactis;
Nomenclatoris, Numeratorisque seorsùm
Quærito Radicem, aut sume infrà proximiorem.

Ut si Radix extrahenda de $\frac{27}{48}$ prius reduces ad $\frac{9}{16}$ quorum Radix quad. $\frac{3}{4}$. Sic Radix $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$

Vel, Nomenclatorem ipsum duc in Numerantem;
Deinde ex producto Radix quadrata trahatur:
Dividat hanc Numerans, Radix hinc Fracta redibit.

Ut $\frac{4}{9}$ ex 4 in 9 fit 36, cujus radix 6 ad 4 ut $\frac{2}{3}$, vel ad 9 etiam $\frac{2}{3}$

Si partim Integri, partim Fracti numeri sint,
Tunc ad idem Fractum, Integro, Fractoque redactis

S

Extrahe Radicem de fracto utroque; peractum eſt.

Ut 12 $\frac{1}{4}$ ad idem fractum, fit $\frac{49}{4}$ quorum radix $\frac{7}{2}$ ſive 3 $\frac{1}{2}$

At Fracti ſi vis ut Quadratum tibi detur;
Hujus & alterius Quadratum quærito utrumque.

Ut ſi vis Quadratum harum Radicum $\frac{7}{2}$ multiplica utrumque in ſe & veniet $\frac{49}{4}$.

Examen.

Extractum in ſe duc Numerum, primuſque redibit;
Si addas quod ſupereſt; ſic certa Probatio fiet.

Ut ſi Radix prius extracta 2601 in ſe ducatur redibit numerus quadratus 6765201.

Et ſi 78 in ſe ducatur addaturque reliquum 1, redibit numerus quadratus 6085.

CAPUT IX.

Modus Generalis Extrahendæ cujuſvis Radicis.

Ut ratione aliâ Radicem educere poſſis
Non modò Quadratam, ſed quantamcumque placebit,
Propoſitum numerum varié per puncta ſecato,
Pro varia quavis Radice, ut fecimus anté.
Diſpoſitis numeris, ac ſic per puncta notatis;
Ut primam Radicem habeas cujuſque figuræ;
Vel ſumas, ſi non eſt integra, proximiorem;
Hanc te primarum hîc deſcriptio facta docebit.

Radices.	Quadrati.	Cubi	Quadrato quadrati.	Surſolidi.	Quadrato Cubi.	Secundi Surſolidi.	Quadrato-quadrato-quadrati.	Cubocubi.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

Dispositis ergo numeris, punctisque notatis;
Ac primâ oblatæ inventâ Radice figuræ:
Scito, quòd est proprius Radici cuique Character,
Aut multis summis, aut unâ simplice constans;
Unicus, & viginti est, pro Radice Quadrata;
Pro Cubicâ, bini sunt; triginta atque trecenta:
Tum Quadratoquadrata tribus, parilique sequentes
Ordine crescentes gaudent, ut pagina monstrat.
Dicuntur Medij, quòd sic operando locentur.
Majori minimos suppone, ut sic Mediorum
Sit totuplex ordo proprius, quot subjiciuntur.

Characteres Medij, cuique figuræ extrahendæ proprij.

Quadratæ.

Locus primi quotientis—— 20 ——— Locus secundi quotientis.

Cubicæ.	*Quadratocubicæ.*
—300—	—600000—
—30—	—150000—
	—20000—
	—1500—
	—60—
Quadrato quadratæ.	*Secundæ Surdesolidæ.*
—4000—	—7000000—
—600—	—2100000—
—40—	—350000—
Primæ Surdesolidæ.	—35000—
—50000—	—2100—
—10000—	—70—
—1000—	————
—50—	&c.

In tribus exemplum proponimus ecce figuris,
Nempè in Quadrata, Cubica, atque Quadratoquadrata;
Ad quarum specimen quasvis tractato Figuras.

Operatio prima.

Radicis primi puncti inventum quotientem;
(Sepositumque, oculis servetur ut integra Radix)
Ad lævam pones Medij: In Radice Quadrata,

Cùm unus ſit Medius tantùm, una locatio fiet:
In Cubicâ cùm ſint bini, poſitum quotientem
Ad lævam minimi Medij, triginta, quadrabis;
Quadratumque ipſum quotientem, in parte ſiniſtrâ
Oppones medio majori, nempé trecentis.
Cùm tres aut quatuor Medij, pluresve dabuntur,
Ad lævam minimi poſito quotiente reperto;
Pro numero Mediorum, hunc quadrabis, Cubicabis,
Aut aliâ Radice augebis, & ad Mediorum
Oppoſitum, ſic auctum in lævâ parte locabis.

Exemplum Radicis Quadratæ extrahendæ ex hoc numero 6765201

Extractam Radicem primi puncti nempé 2, multiplicatam in ſe, id eſt 4 ex 6, & (ſtante numero 2765201) ſepoſitam, ad lævam pones Medij, ſic,

Prima Operatio. (2

2 —— 20

Exemplum Radicis Cubicæ extrahendæ ex hoc numero 238328

Extractam Radicem primi puncti, nempé 6, ex 238, multiplicatam Cubicé, id eſt 216, remanent 22, & (ſtante numero 22328) ſepoſitam, ad lævam pones minimi medij, nempé 30, & quadratam ſcilicet 36, ad lævam majoris Medij nempé 300 appones, ſic,

Prima Operatio. (6

36 —— 300
6 —— 30

Exemplum Radicis Quadratoquadratæ

Numeri 14776336 nempé 6, ſepoſitam, quadratam, Cubicatam, appones ſic,

Prima Operatio.

216 —— 4000 (6 | ſublata radice quadratoquadratâ
36 —— 600 | 1296 de primo puncto.
6 —— 40 | 1477, ſuper eſt 1816336

Operatio secunda.

HÆc, aut hæ, oppositum Mediorum quodque suorum
Multiplicent; tum producta ad sese addita puncto
Subscribe, ut quotientem habeas per Partitionem.
(Sat si Facta duo majora addantur, ut ipsis
Partitione novus quotiens hinc possit haberi,
Talis quem retrahas Mediis auctum sociisque.)
Ille novus quotiens in dextra parte locetur,
Majori oppositus Medio; ipsiusque Quadratus,
Tum Cubus, inde Quadratoquadratus; totque sequantur
Radices, dum una excedat numerum Mediorum:
Sic in Quadratis binæ tantùm; In Cubicis tres,
Et quatuor succedent in Quadratoquadratis;
Scilicet unâ plus quàm sint numeri Mediorum.

Exemplum in Quadrato numero

6765201, qui post primam operationem est 2765201.

2ª *Operatio.*	20	276 (6	servata
2——20——6	2	40	radix
36	40		26

Exemplum in Cubico numero

238328, qui post primam operationem est 22328.

2ª *Operatio.*	300	22328 (2	servata radix
36——300——2	36	10800	62
6——30——4	10800		
8			

Exemplum in Quadratoquadrato numero

14776336, qui post primam operationem est 1816336.

2ª *Operatio.*	4000	1816336 (2
216——4000——2	216	874800
36——300——4	864000	servata radix
6——40——8		62
36	300	
	36	
	10800	
	874800	

3ª *Operatio.*

MUltiplica tres ſupremos primi ordinis in ſe:
Ac deinde in Cubicis, tres multiplicato ſecundos;
Sic ſemper, quando fuerint tres, multiplicato:
Adde ſimul producta illa; ac tandem ſuperadde
Productis illum qui à dextrâ parte ſtat unus:
A ſupraposito numero totum retrahatur.

Exemplum in Quadrato numero.

2—20—6 | hi tres in ſe multiplicati faciunt
36 | 240 quibus addito 36, fit 276
| quibus detractis ex ſupraposito numero 276
| nihil ſupereſt de hoc puncto.
| Et eſt quotiens 26.

Exemplum in Cubico numero.

36——300—2 | hic 1º ordo in ſe multiplicatus facit 21600;
6———30—4 | hic 2º ordo multiplicatus in ſe facit 720
8 | cui ſuperaddens 8, cum collectis ſummis
| fit 22328, qui detractus de ſupraposito,
| nihil relinquit, & eſt quotiens
| 62 ſive radix Cubica dati
| numeri 238328 (62.

Exemplum in Quadratoquadrato numero.

216—4000—2 | hic 1º ordo in ſe multiplicatus facit 1728000
36—-300—4 | hic 2º ordo facit 10800
6—-40—8 | hic 3º ordo cum 16, facit 1936
16 | Summa 1740736
| 1816336
| 1740736 ſervata radix qq.
| 75600 (62.

Continuatio præcedentium operationum.

SI nondum perfecta eſt res, totum quotientem
Appone ad lævam Medij minimi; inde quadratum,
Atque Cubum, ut factum eſt; quotientem quære; locato

Ad dextram Medij majoris ; ſubde quadratum,
Atque Cubum ; Medios tres in ſe multiplicato,
Producta adde, & eum qui à dextra parte ſtat unus ;
A ſuprapoſito totum retrahatur ; idemque
Perpetuò fiat, videat dum operatio finem.
Et zero quamvis, à dextra parte locatum,
Nil faciat, tamen in quotiente à parte ſiniſtra
Augebit Medios, quotientem cùm auxerit ipſum.

Exemplum in numero Quadrato.

6765201, cujus expedita ſunt jam duo puncta.

	20	
26—20——0	26	atqui 520 ne ſemel in ſuprapoſito puncto 52. ergo apponendum eſt zero tam in quotiente quàm ad dextram Medij & ſic fit quotiens 260.
0	520	

260—20——1	20	5201 (1
1	260	5200
	5200	addito 1 fit 5201, quo detracto ex 501 nil ſupereſt ; & fit radix 2601 dati numeri 6765201.

CAPUT X.

De Inventione Numerorum qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem Extractionum, in præcedenti Capite explicatarum. Confectio Tabulæ ad Extractionem quarumlibet ſpecierum.

PErpetuæ Tabulæ hac methodo Confectio fiet.

1° ordo.

Diſpoſitis Numeris Naturalis ſeriei
Rectà deſcendentis & incipientis ab uno,
Incipiet tranſverſalis ſic quilibet ordo :

2° ordo.

Ad ternum primi numerum incipit ordo ſecundus,
Huic terno ſimilem primâ ſibi ſede locando ;

3° ordo.

Ad ternumque secundi istius tertius ordo,
Huic terno similem primâ sibi sede locando;

4° ordo, &c.

Quartusque ad terni ternum numerum incipit ordo,
Huic terno similem primâ sibi sede locando;
Sicque sequens terni ad præcedentem incipit ordo,
Et similem huic terno primâ sibi sede locabit.
Sic autem totus quivis complebitur ordo:
Inventum primum cujusuis ordinis, adde
Ad similem sibi in ordine proximiore sinistro;
Ex binis bini ordinis exit terminus alter
Descendens in quovis ordine: quilibet ordo
Sic jungendo duos respondentes sibi semper,
Subjectum numerum descendendo indé creabit.

TABULA ad inveniendos numeros cuique Radici extrahendæ peculiares.

MODUS perficiendi quemlibet ordinem.

INventum primum numerum cujuslibet ordinis addes ad numerum proximioris sinistræ seriei sibi respondentem; & fiet secundus numerus hujus ordinis: qui secundus, additus ad sibi respondentem proximioris sinistræ creat tertium; & sic perpetuò ut in Tabula facilé est videre.

1° ordo seriei naturalis	2° ordo	3° ordo	4° ordo	5° ordo	6° ordo	7° ordo	8° ordo
1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	&c.
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
&c.							

Vsus Tabulæ præcedentis.

PER primam ſeriem Radices ſume trahendas:
Radicis tibi quadratæ binarius index;
Radicis Cubicæ ternarius; inde ſequentes
Demonſtrant numeri Radices quaſque trahendas.
Sic autem ad quaſvis Radices utere menſâ:
Quales in Tabulâ, numeros ſic ponito quoſuis;
Ac tum retrogradé quoſuis ex ordine pone:
Ultimus in paribus, tantùm ſemel; at reliqui, bis
Tum rectà tum retrogradé: ſed in imparibus, bis
Omnes ponuntur; ſemper namque ultimus eſt jam
Bis poſitus: ſic in paribus, numerus numerorum
Semper fit impar; ſemper ſed in ſmparibus par.
Omnibus aut rectâ vel retrogradé numeris ſic
Diſpoſitis, pro ſede ſua cuique addito cifras
A dextrâ numerans: ſic unam primus habebit
Et binas alter; tres tertius; & reliqui pro
Sede ſua accipient, addent numeroque priori;
Qui quamvis habeat cifram, haud numerabitur illa.

1.
2. Numerus indicans Rad. quad.
3. Numerus Cubicam indicans.
4. Numerus Quadratoquad.
&c.

Ergo Radicum numeros ſic omnium habebis,
Tum rectà tùm retrogradé, cifriſque notatos,
Per præcedentem Tabulam dictâ arte creatos

Radicibus quadratis ſervit numerus ille unus

20 | In Tabula eſt 2.

Duo ſequentes ſerviunt radici Cubicæ

300 | 3 | 3.
30 |

Tres ſequentes Quadratoquadratæ

4000 | 4 | 6. additur retrogradé 4.
600 |
40 |

Quatuor ſequentes r^a. Surdeſolidæ.

50000 | 5 | 10 | 10. Retr. 5.
10000 |
1000 |
50 |

Quinque ſequentes quadratocubicæ.

600000	6 | 15 | 20. R. 15. 6.
150000	
20000	
1500	
60	

Sex ſequentes 2[a]. Surdeſolidæ

7000000	7 | 21 | 35 | 35 R. 21. 7.
2100000	
350000	
35000	
2100	
70	

Septem ſequentes Quadrato-quadrato-quadratæ

80000000	8 | 28 | 56 | 70 | R. 56. 28. 8.
28000000	
5600000	
700000	
56000	
2800	
80	

Et ſic in infinitum ſi præcedens Tabula protendatur in infinitum.



EXPLICATION

Des quatre Livres precedens IV. V. VI. & VII. contenant la THEORIE des Nombres telle qu'elle est dans les 5, 7, 8 & 9 d'Euclide, & dans les deux Livres d'Arithmetique de Boëce & autres Auteurs anciens & nouveaux.



OMME dans la Theorie des Nombres, les Proportions y tiennent le principal rang, quoyque nous en ayons fait ailleurs un Traité particulier & que Boëce en parle considerablement, neanmoins nous avons jugé à propos d'en donner icy un abregé & de faire preceder le cinquiéme Livre des Proportions d'Euclide mis dans un autre ordre.

Des Proportions simples ou Raisons, & des Proportions proprement dites ou doubles Comparaisons.

LA simple Proportion ou Raison est le rapport de deux grandeurs de mesme genre selon la quantité; comme 1 à 2, 3 à 4, 6 à 8 &c. Le premier terme s'appelle Antecedent, & le second s'appelle Consequent.

Les grandeurs qu'on compare & que nous exprimons par des nombres, ou sont égales, comme 1 à 1, 4 à 4, &c. ou inégales, comme 2 à 4, 5 à 6, &c.

Les inégales sont de cinq sortes. L'une contient l'autre;

Ou une fois & une de ses parties : comme 3 à 2; 3 contient 2 une fois & sa moitié :

Ou une fois & plusieurs de ses parties : comme 5 à 3; 5 contient 3 une fois & deux de ses parties :

Ou plusieurs fois precisément : comme 4 à 2; 4 contient 2, deux fois :

Ou plusieurs fois & une de ses parties comme 7 à 3; 7 contient 3 deux fois & une de ses parties :

Ou plusieurs fois & plusieurs de ses parties : comme 11 à 3; 11 contient 3, trois fois & deux de ses parties.

La double comparaiſon ou la Proportion proprement dite eſt la comparaiſon de deux raiſons ou méme de pluſieurs, comme quand on dit, que 2 eſt à 3, comme 4 eſt à 6, ou 6 à 9.

Souvent on prend le mot de Proportion pour celuy de Raiſon.

La Proportion a d'ordinaire quatre termes, comme 6 à 3, 4 à 2. & n'en peut avoir moins de trois differens & qui en valent quatre en employant le ſecond terme deux fois, comme 2 à 4, 4 eſt à 8. à moins que ce ne fut dans les proportions d'égalité, comme 2 à 2, ainſi 4 à 4; dans leſquelles il n'y a que deux termes, mais employez comme s'il y en avoit quatre differens.

Les deux termes de la premiere Raiſon s'appellent le premier Antecedent & le premier Conſequent; les deux de la ſeconde s'appellent le ſecond Antecedent & le ſecond Conſequent. Euclide ne leur donne ordinairement que le nom de leur rang, premier, ſecond, troiſiéme, quatriéme, &c.

Il y a trois ſortes de Proportions, Arithmetique, dont les differences ſont égales comme 2, 4, 6, &c. Harmonique dans laquelle trois nombres ſont diſpoſez en ſorte que la raiſon des extrémes eſt égale à la difference du milieu avec les deux extrémes, comme 3, 4, 6. La Geometrique dont les raiſons ſont toûjours les mémes, comme 1 à 2, 4 à 8. Il n'eſt parlé dans le 5 d'Euclide que de la Geometrique, dont il y en a de deux ſortes, les unes ſont continuës, dans leſquelles tous les termes de ſuite, le premier avec le ſecond, le ſecond avec le troiſiéme, le troiſiéme avec le quatriéme ſont en méme raiſon, comme 2, 4, 8, 16, qui ſont de ſuite doubles l'un de l'autre, 4 de 2, 8 de 4, & 16 de 8.

Les autres ſont interrompuës, qui bien qu'elles ſoient dans la méme Proportion, toutesfois la raiſon n'eſt pareille que du premier au ſecond, & du troiſiéme au quatriéme, mais non pas du ſecond au troiſiéme, comme 2 à 3, 4 à 6.

On appelle les premieres continuellement Proportionelles; & les autres, mémes ou pareilles Proportions.

Proprietez des Proportions Geometriques.

Entre quatre termes Proportionnaux en quelque genre de Proportion que ce ſoit, les deux extrémes ſe multiplians font la méme ſomme ou grandeur, que les deux du milieu ſe multiplians.

2, 4, 8, 16	2 fois 16 font 32, comme 4 fois 8.
6, 3, 4, 2	6 fois 2 font 12, comme 3 fois 4.
9, 3, 6, 2	9 fois 2 font 18, comme 3 fois 6.
2, 3, 4, 6	2 fois 6 font 12, comme 3 fois 4.
4, 5, 8, 10	4 fois 10 font 40, comme 5 fois 8.
5, 7, 10, 14	5 fois 14 font 70, comme 7 fois 10.
8, 5, 16, 10	8 fois 10 font 80, comme 5 fois 16.

Entre tant de termes proportionnaux qu'on voudra, tous les Antecedens assemblez sont en mesme raison avec tous les Consequens assemblez, qu'estoit chaque Antecedent avec son Consequent,

A B C D A B C D AC ID
comme 6, 3, 4, 2; comme 6 à 3 & 4 à 2; ainsi 10 à 5.

A B C D E F ACE BDF
comme 3, 4, 6, 8, 9, 12. ainsi 18 à 24.

Entre tant de termes proportionnaux qu'on voudra, les antecedens assemblez avec les consequens, sont en mesme raison de deux en deux, que les antecedens l'un à l'autre & les consequens l'un à l'autre,

A B C D AB CD A C B D
Comme 6, 3, 4, 2, 9 & 6, sont comme 6 à 4 & 3 à 2.

Toutes les Propositions du V. des Elemens d'Euclide, reduites en un autre ordre suivant le nombre des grandeurs qui y sont comparées ou de deux en deux, ou au nombre de trois, ou de quatre, ou de six, ou de huit separées de quatre en quatre, ou de deux en deux; ou enfin en nombre indeterminé.

Si de deux grandeurs en mesme raison on en soustrait deux moindres qui soient en mesme raison ou proportion, ce qui reste sera encore dans la mesme proportion. Comme si de 12 & 6, on ôte 8 & 4, il restera 4 & 2, qui sont tous en la mesme proportion double. Et c'est la 5[e]. proposition.

Si de deux grandeurs egalement multiples de deux autres, on ôte deux egalement multiples des deux plus petites, ce qui restera sera ou egalement multiple des deux plus petites, ou leur sera egal. Comme si de 12 & 18 qui sont egalement multiples de 2 & de 3, on ôte 4 & 6 qui sont egalement multiples de 2 & de 3, il restera 8 & 12, qui seront encore egalement multiples de 2 & de 3. Ou si l'on avoit ôté 10 & 15 de 12 & 18, il ne seroit resté que 2 & 3 qui seroient egaux aux deux plus petites 2 & 3; comme 10 & 15 en estoient egalement multiples. Et c'est la 6 & 19[e]. propositions.

S'il y a trois grandeurs dont les deux premieres soient egales, & la troisiéme differente, cette troisiéme aura mesme raison avec l'une & l'autre des deux premieres, comme 4 & 4 à 2. C'est la 7 & 9[e]. prop.

Entre trois grandeurs dont la premiere est plus grande que la seconde, & la seconde que la troisiéme; la raison de la plus grande à la plus petite sera plus grande que de la moyenne à la plus petite, & que de la plus grande à la moyenne. Et celle de la moyenne à la plus petite sera plus grande que celle de la plus grande à la moyenne. Comme 6, 4, 2, la raison de 6 à 2 est plus grande que celle de 4 à 2, & que celle de 6 à 4: & celle de 4 à 2 plus grande que celle de 6 à 4. C'est la 8. & 10[e]. prop.

Si l'on compare trois grandeurs à trois autres en mesme raison de deux

en deux, mais dans un ordre renverſé; telle que ſera la premiere à l'égard de la troiſiéme, telle ſera la quatriéme à l'égard de la ſixiéme, & telle que ſera la premiere à la ſeconde, telle ſera la cinquiéme à la ſixiéme. Et telle que ſera la ſeconde à la troiſiéme, telle ſera la quatriéme à la cinquiéme.

Exemple. 18, 12, 4
Comme 18 à 4, ainſi 27 à 6: | 27, 9, 6.
& comme 18 à 12, ainſi 9 à 6: & comme 12 à 4, ainſi 27 à 9. C'eſt la 21. & 23e. propoſ.

De quatre grandeurs (ou tant que l'on voudra en nombre pair,) en meſme proportion, les Antecedens aſſemblez ont meſme raiſon avec les Conſequens aſſemblez, que chaque Antecedent avoit avec ſon Conſequent,
A B C D AC BD A B C D
comme 12, 8; 9, 6: 21 à 14, comme 12 à 8 & 9 à 6.

Et les antecedens aſſemblez avec les conſequens, ont la meſme raiſon qu'avoient auparavant les antecedens avec les antecedens, ou les conſe-
A B C D AB CD A C
quens avec les conſequens. Comme 12, 8, 9, 6: 20 à 15 comme 12 à 9
B D
& 8 à 6. C'eſt la premiere, 12. 17. & 18e. prop.

De quatre grandeurs en meſme proportion, la plus grande jointe à la plus petite, ſera plus grande que les deux autres jointes enſemble. Com-
A B C D AD BC
me 12, 6, 8, 4. 16 eſt plus grand que 14. C'eſt la 25e. prop.

Six grandeurs de deux en deux egales, ont toutes les raiſons egales, comme 4, 2; 4, 2; 4, 2. C'eſt l'11e. prop.

De ſix grandeurs, dont les quatre premieres ſont proportionnelles, ſi la cinquiéme eſt en meſme raiſon avec la ſeconde, que la ſixiéme avec la quatriéme, la premiere & la cinquiéme aſſemblées ſeront en meſme raiſon avec la ſeconde, que la troiſiéme & la ſixiéme aſſemblées ſeront à la
A B C D E F E B F D AE
quatriéme. Comme 6, 3; 4, 2; 9, 6. | 9 eſt à 3, comme 6 à 2; & 15
CF D
à 3 comme 10 à 2. C'eſt la 2. propoſition, & la 24e.

De ſix grandeurs dont les quatre premieres ſont proportionelles, ſi la cinquiéme a meſme proportion avec un des termes de la premiere raiſon (c'eſt à dire avec le premier ou le ſecond des quatre premiers) que la ſixiéme aura avec un des termes de la ſeconde raiſon, (c'eſt à dire avec le troiſiéme ou quatriéme des quatre premiers,) le cinquiéme & ſixiéme auront encore la meſme raiſon avec l'autre terme de la premiere ou ſeconde
A B C D E F E A F C
raiſon, comme 4, 2; 6, 3; 8, 12. Puiſque 8 eſt tel à 4, que 12 eſt à 6;
E B F D
8 encore ſera tel à 2, que 12 à 3.

Et telle que ſera la premiere raiſon à l'égard de la troiſiéme, ou plus

grande ou moindre, telle ſera la ſeconde raiſon à l'égard de cette troiſié-
A B E F C D
me. Comme puiſque 4, 2, eſt plus grande que 8, 12; auſſi 6, 3, ſera
E F
plus grande que 8, 12. C'eſt la 3[e]. & 13[e]. propoſ.

S'il y a quatre grandeurs proportionnelles, & qu'on en prenne quatre autres dont les antecedens & les conſequens ſoient egalement propor-
A B C D
tionels aux quatre premieres, comme 4, 2, 6, 3
E F G H
8 6 12 9
E G A C F H B D
8 & 12 ſont doubles à 4 & à 6, & 6 & 9 ſont triples à 2 & à 3, de quelle maniere qu'on les compare comme ils ſe répondent, on trouvera la pro-
A E C G B F
portion egale par tout : Comme 4 eſt à 8, 6 eſt à 12; comme 2 eſt à 6,
D H A C B D E G E H
3 eſt à 9; comme 4 eſt à 6, & 2 à 3; ainſi 8 eſt à 12, & 6 à 9. C'eſt la 4[e]. prop.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & qu'on en prenne tant d'autres en meſme raiſon de deux en deux, telle que ſera la premiere à la troi-
A B C D E F
ſiéme, telle ſera la quatriéme à la ſixiéme; comme 12, 9, 6; 8, 6, 4 &c.
A B D E B C E F A C
12 eſtant à 9, comme 8 à 6; & 9 eſtant à 6, comme 6 à 4; 12 eſt à 6, com-
D F A C D F
me 8 à 4 : Et puiſque 12 eſt plus grand que 6, 8 ſera plus grand que 4: S'il eſtoit moindre ou egal, l'autre le ſeroit de meſme. C'eſt la propoſition 20. & 22[e].

Enfin ſi l'on met tant de grandeurs qu'on voudra continuellement proportionnelles, telle que ſera la premiere raiſon à la ſeconde, telle ſera la ſeconde à la troiſiéme, & la troiſiéme à la quatriéme, &c. & tel que ſera le premier antecedent au ſecond, ou le premier conſequent au ſecond, tels ſeront les ſeconds antecedens & les ſeconds conſequens aux troiſiémes antecedens & conſequens, & ainſi tant qu'il y en aura, comme 32 à 16, ainſi 16 à 8; 8 à 4; 4 à 2, &c.

Mais ſi les grandeurs ne ſont que proportionnelles, en ſorte que la premiere grandeur ſoit à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme; ſi la premiere eſt plus grande, egale, ou moindre que la troiſiéme, telle ſera la ſeconde à l'egard de la quatriéme. Comme 6, 3, 4, 2: 6, 3, 6, 3; 2, 4, 3, 6.

Et chaque antecedent a meſme raiſon avec ſon conſequent dans les raiſons egalement multiples; comme 12, 4; 6, 2: 12 eſt à 4, comme 6 à 2.

Et les antecedens avec chaque antecedent, comme auſſi les conſequens avec les conſequens; comme 12, 4, 6, 2: 12 eſt à 6; comme 4 eſt à 2; 12 eſt

à 4, comme 6 à 2. Ce sont les 14, 15, & 16e. propositions du V. des Elemens d'Euclide.

De quelques Nombres des Pythagoriciens & Platoniciens.

LEs Pythagoriciens vouloient trouver par tout des Nombres & de l'Harmonie. Ils mettoient des Proportions & de l'Harmonie dans la distance des Planetes & dans les mouvemens des Cieux. Ils en trouvoient dans la formation de l'homme, & pretendoient par les Nombres & les proportions de la Musique, rendre raison pourquoy les enfans qui venoient au septiéme ou neuviéme mois, pouvoient plutost vivre que ceux qui venoient au huitiéme. Ils pretendoient mesme que toutes les démarches de la nature pour la formation du lait, du sang, & de la chair, estoient fondées sur les principes des nombres harmoniques, qu'ils expliquoient & appliquoient ainsi à cette matiere. Les accords de la Musique consistent en ces quatre Nombres, 6, 8, 9, 12. de 6 à 12 c'est l'octave en proportion double: de 6 à 9 & de 8 à 12, c'est la quinte en proportion d'un & demy: de 6 à 8, & de 9 à 12, c'est la quarte en proportion d'un & tiers ou surtierce. Or dans ces mesmes nombres, 6, 8, 9 & 12, ils trouvoient & les sept mois, & le temps que la nature employoit à la formation de l'homme; les six premiers jours la semence se changeoit en lait; les huit suivans, le lait se changeoit en sang; les neuf suivans, le sang se changeoit en chair, & les douze suivans l'homme estoit formé. Que si vous ajoûtez de suite ces quatre nombres, 6, 8, 9, 12, cela fait 35 qui composent les 35 jours de la formation de l'homme; & ces 35 estant multipliez par le nombre de perfection & harmonique qui est 6, cela fait le nombre de 210 jours qui composent justement sept mois de chacun 30 jours.

Pour les neuf mois ils prenoient un autre tour, pour prouver qu'ils estoient plus pleins de vie pour l'enfant, parce qu'ils contenoient plus d'harmonies; sans neanmoins se départir du fondement déja posé des 35 jours. Ils avoient recours au nombre dix qui comprend tous les nombres simples, & qui est composé de l'addition des quatre premiers, 1, 2, 3, 4, qui font 10. Et dans ces quatre premiers nombres les Pythagoriciens vouloient tellement que toutes les Consonances de la Musique se trouvassent, qu'ils en excluoient toutes celles qui ne s'y rencontroient pas. L'octave y estoit d'1 à 2 & de 2 à 4. La quinte y estoit de 2 à 3. La quarte de 3 à 4. La douziéme d'1 à 3. Et la quinziéme d'1 à 4. Ils disoient donc que toutes ces harmonies, qui composoient le nombre 10 qui estant adjoûté au premier nombre 35 faisoit 45, lequel estant multiplié aussi par le nombre 6 faisoit 270 jours, c'est à dire neuf mois de chacun trente jours; tout cela disoient-ils estoit capable d'assûrer la vie de l'enfant qui naissoit à neuf mois bien accomplis. Que le huitiéme mois n'ayant point ces nombres & ces harmonies, ne pouvoit donner à l'enfant une vie solide.

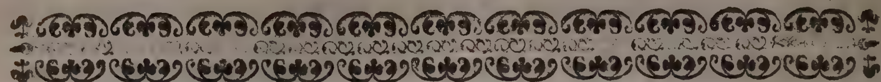
Platon qui suivoit toutes les imaginations des Pythagoriciens, pour la formation

formation du corps de l'homme, & pour la compoſition de l'ame par des nombres harmoniques, a voulu auſſi employer les nombres non ſeulement pour le partage des Offices & Charges de ſa Republique, mais encore pour en déterminer la durée. Nous avons rapporté à la fin du IV. Livre Chapitre VIII. toutes les diviſions du nombre de Platon 5040, qui vont juſqu'à 60, & pour cela il eſtimoit que ce nombre de 5040 eſtoit fort propre pour regler celuy des habitans de ſa Republique.

Mais voicy l'explication d'un autre nombre de Platon, ſi obſur qu'il a donné lieu à Ciceron d'en faire un proverbe, & dire quand quelque choſe eſtoit obſcure, qu'elle l'eſtoit autant que le nombre de Platon. Ce Philoſophe faiſant dire à Socrate que quelque parfaite que fût ſa Republique elle finiroit neanmoins quelque jour: Et pour déterminer ce jour qui arriveroit apres une certaine revolution d'années, il l'envelopa ſous le myſtere des nombres; en ſuppoſant que le nombre 12 eſtoit un nombre d'excellence, parce qu'il contenoit en luy les deux plus parfaites harmonies, ſçavoir la quarte & la quinte qui compoſoient l'octave ou diapaſon: ſuppoſant encore que dans les figures Geometriques qu'ils appliquoient aux nombres, le Solide ou Cube eſtoit la plus parfaite, & que quand on eſtoit arrivé à cette perfection qui eſtoit extrême, on ne pouvoit plus avancer ny auſſi demeurer en meſme état, & qu'ainſi il falloit perir. Voicy comme il fait parler Socrate au VIII. Livre de ſa Republique, ſuivant l'abregé qu'en a fait Ariſtote au V. Livre de ſes Politiques. Le changement de Republique arrivera lors qu'aux termes radicaux de la ſurtierce ou quarte, on joindra 5; & qu'il en viendra un nombre qui contiendra deux harmonies ou conſonances, & que ce nombre deviendra un Solide. Les deux termes radicaux de la quarte ſont 3 & 4 qui font 7, ceux de la quinte ſont 2 & 3 qui font 5, & 7 & 5 font 12, qui contient ces deux conſonances; & 12 eſtant fait ſolide, c'eſt à dire 12 fois 12 fois 12; il viendra le nombre de 1728, où arrivera le changement.

Je ne dois pas oublier que Platon dit que la premiere marque de cette décadence ou ruine de Republique, ſera le mépris & l'ignorance de la Muſique.





EXTRAIT DES DEUX LIVRES D'ARITHMETIQUE DE BOËCE, CONTENANT LA THEORIE DES NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

Divisions Definitions & Proprietez des Nombres en general.

I. OUT Nombre est pair ou impair.

II. Le Nombre pair est celuy qui peut estre divisé en deux parties ou moitiez egales, comme 8 en 4 & en 4.

III. Le Nombre impair ne peut estre divisé en deux parties qu'il n'y en ait une plus grande ou moindre que l'autre d'une unité, comme 9 en 5 & en 4.

IV. Tout Nombre est justement la moitié des deux nombres joints ensemble qui sont autour de luy, ou plus haut ou plus bas, soit au premier ou second degré, &c. comme 5 ayant autour de luy 4 & 6 qui font 10, & 3 & 7 qui font 10; & 2 & 8, & enfin 1 & 9 qui font 10, en est la moitié. De mesme 6, est la moitié de 12, que font aussi ceux qui sont autour de 6, dans le premier degré, 5 & 7; dans le second 4 & 8, dans le troisiéme 3 & 9, &c. Et de mesme en toute autre progression Arithmetique, 5,10,15 | 4, 8, 12 | 6, 8, 10 | 3, 6, 9 | &c. | 10 est la moitié de 20 que font 5 & 15, 8 est la moitié de 16 que font 4 & 12 | &c.



CHAPITRE II.

Du Nombre Pair.

IL y a trois ſortes de Nombres Pairs.

I. L'un eſt pairement pair, dont toutes les diviſions ou partages en deux parties egales & paires deſcendent juſqu'à l'unité, comme 32 en 16, en 8, en 4, en 2, en 1, & 1.

II. L'autre eſt pairement impair qui n'a qu'une diviſion en parties egales en nombres impairs, comme 18 en 9 & 9.

III. Le troiſiéme eſt impairement pair qui a plus d'une diviſion en deux parties egales, mais qui avant que de deſcendre juſqu'à l'unité à deux parties en nombres impairs, comme 12, qui ſe diviſe en deux fois 6, & 6 en deux fois 3.

CHAPITRE III.

Des proprietez du Nombre pairement pair, c'eſt à dire de celuy qui eſt produit par la multiplication double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, &c.

I. SI les rangs de la progreſſion ſont en nombre pair, c'eſt à dire qu'il y en ait ou 4 ou 6 ou 8 rangs, &c. les deux nombres du milieu, & puis ceux qui ſeront autour d'eux au premier ou ſecond ou troiſiéme degré, &c. ſe donnent mutuellement la denomination de la partie ou portion qu'ils font en la ſomme finale. Comme en cette progreſſion il y a huit rangs, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, les deux du milieu 8 & 16, ſe donnent mutuellement la dénomination de la portion qu'ils font en la ſomme 128, c'eſt à dire que 8 en eſt la ſeiziéme partie, & 16 la huitiéme, en ſorte que ſe multipliant l'un l'autre, ils font la ſomme 128; 8 fois 16 ou 16 fois 8, 128. De meſme les deux qui ſont autour, ſçavoir 4 & 32: 4 en eſt la trente-deuxiéme partie, & 32 en eſt la quatriéme, c'eſt à dire que 4 fois 32 ou 32 fois 4 font 128. Ainſi des autres, 2 & 64.

II. Si les rangs ſont en nombre impair ou 5 ou 7 &c. comme 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, celuy du milieu, ſçavoir 8, ſe donnera à luy-meſme la dénomination de la portion qu'il fait en la ſomme 64, dont il eſt la huitiéme partie. Puis à ſes côtez 4 & 16, 4 en eſt la ſeizieme, & 16 la quatriéme, & puis 2 & 32, 2 en eſt la trente-deuxiéme, & 32 la deuxiéme, & enfin 2 en eſt la ſoixante-quatriéme.

III. Et comme en ajoûtant de ſuite les nombres l'un à l'autre, ils font une ſomme moindre d'une unité que celuy qui ſuit ceux qui ont eſté ajoû-

tez, & qui est toûjours le double du precedent, comme 1 & 2 font 3, qui est moindre d'une unité que 4 ; & de mesme en ajoûtant 4 aux deux precedens, il viendra 7, qui est moindre d'une unité que 8, qui suit & qui est double de 4 ; & en ajoûtant 8 il viendra 15 qui est moindre que 16 d'une unité, &c.

Quand on voudra sçavoir la somme de tous les nombres de la progression, il faudra doubler le dernier de la somme proposée, & puis en ôter l'unité. Comme 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, en doublant 128 l'on auroit 256, de qui ôtant 1, l'on aura pour la somme de tous les nombres precedens ajoûtez ensemble, 255.

IV. Entre quatre nombres pairement pairs, les deux extrêmes se multiplians, font la mesme somme que les deux du milieu multipliez l'un par l'autre. Ainsi en 2, 4, 8, 16, 2 fois 16 font 32, comme 4 fois 8.

V. Et entre trois nombres, le milieu se multipliant soy-mesme, fait autant que les deux extrêmes multipliez l'un par l'autre. Ainsi en 2, 4, 8 | 4 fois 4 fait 16, comme 2 fois 8 font 16.

CHAPITRE IV.

Des proprietez du nombre pairement impair ; comme 2, 6, 10, 14, 18, 22, &c.

I. COmme il naît des impairs multipliez par 2, comme 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. qui estant multipliez par 2, font 2, 6, 10, 14, 18, 22. Ils sont distans l'un de l'autre de 4, & n'ont qu'une division qui les fait entrer d'abord dans les impairs.

II. Cela fait que quand la dénomination de la partie est pair, la quantité est impair, comme la deuxiéme partie de 18 est 9, ou la sixiéme partie de 18 est 3 : Et quand la dénomination est impair, la quantité est pair comme la neufviéme partie de 18 est 2, ou la troisiéme partie de 18 est 6.

III. Entre quatre nombres pairement impairs, comme en 2, 6, 10, 14, les deux du milieu 6 & 10 joints ensemble font la mesme somme que les deux extremes 2 & 14 ; c'est à sçavoir 16 de part & d'autre.

IV. Entre trois nombres pairement impairs, celuy du milieu est la moitié de la somme des deux extrêmes assemblez, comme en 2, 6, 10, le milieu 6, est la moitié de 12, qui est la somme des deux extrêmes 2 & 10, assemblez.

CHAPITRE V.

Des proprietez du Nombre impairement pair.

CE Nombre vient de la multiplication des pairemens pairs par les impairs, en sorte que chaque impair separement puisse multiplier cha-

que pairement pair à l'infiny, en commençant par 4 : par exemple, 3 multipliant les pairement pairs, 4, 8, 16, &c. produira les impairement pairs, 12, 24, 48, &c. 5 les multipliant produira 20, 40, 80, &c. 7 les multipliant produira 28, 56, 112, &c.

Ainſi des autres impairs qui multipliant les pairement pairs produiront toujours des impairement pairs en raiſon double l'un de l'autre, qui participeront de la nature des pairemens pairs, en ce qu'ils auront plus d'une diviſion en nombres pairs ; & des pairement impairs, parce qu'ils ne deſcendront pas d'abord juſqu'à l'unité.

Ils auront auſſi les proprietez de l'un & de l'autre, en diſpoſant les produits de chaque pairement pair par chaque impair l'un ſous l'autre en long & en large, ainſi

	long			
par 3.	12	24	48	96
par 5. (*large*)	20	40	80	160
par 7.	28	56	112	224
par 9.	36	72	144	288

I. Ceux qui ſont en large, c'eſt à dire de haut en bas, ont les deux du milieu égaux aux deux extrémes ; Et un ſeul milieu eſt la moitié des deux extremes, comme dans les pairement impairs.

Par ex. Si vous joignez 36 & 20, qui ſont en large ils feront 56, dont 28 le milieu ſera la moitié. Et de méme ſi vous joignez 28 & 12, ils feront 40, dont 20 eſt la moitié. De méme dans les autres rangs qui vont de bas en haut. Mais ſi entre quatre nombres vous joignez les deux extrémes, comme 36 & 12, ils feront 48, comme auſſi les deux du milieu 28 & 20 eſtant joins enſemble font 48.

II. Ceux qui ſont en long, un ſeul milieu (quand il n'y en a que trois) ou les deux milieux (quand il y en a quatre) ſe multipliant font la méme ſomme que les deux extrémes multipliez l'un par l'autre, comme dans les pairement pairs.

Par ex. Si vous multipliez en long deux termes qui n'ont qu'un milieu, comme 12 & 48, qui ont 24 pour milieu, ce qui viendra de la multiplication des deux extrémes, viendra auſſi de la mnltiplication du milieu par luy-méme ; comme 12 fois 48. font 576, & 24 fois 24 font auſſi 576.

De méme ſi vous multipliez 96 par 24, il viendra 2304 comme auſſi en multipliant 48 par luy-méme il viendra 2304.

Et ſi vous prenez deux milieux entre deux extrémes il viendra autant de la multiplication des deux milieux l'un par l'autre que de la multiplication des deux extrémes l'un par l'autre, comme 12 fois 96 font 1152. ainſi 24 fois 48, font 1152. &c.

CHAPITRE VI.

Du Nombre impair.

IL y en a de trois ſortes, l'un eſt premier & non composé & n'a point d'autres meſure que l'unité, comme 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c.

L'autre eſt ſecond & composé qui peut eſtre diviſé par d'autres impairs que l'unité, comme 9, 15, 21, 25, 27, 33, &c. qui outre l'unité ont d'autres impairs dont ils ſont composez comme 9 qui a 3; 15 qui a 3 & 5; 21 qui a 3 & 7.

Le troiſiéme eſt ſecond & composé en luy-méme, mais premier & non composé à l'égard d'autres nombres, comme 9 & 25 qui n'ont point enſemble de commune meſure autre que l'unité.

Ainſi ceux qui ne ſont produits que par l'unité ſont premiers & non composez.

Ceux qui ſont produits par un autre que l'unité ſont ſeconds & composez.

Et ceux qui ſont produits par d'autres & qui eſtant multipliez chacun par leur quantité ou leur propre denominateur n'ont point de commune meſure, ceux-là ſont premiers entre eux comme 9 & 25 : Car 3 fois 3 ſont 9, & 5 fois 5 font 25, où il n'y a rien de commun. Au lieu que quand on dit 3 fois 3 font 9, & 3 fois 5 font 15, on voit que 15 eſtant produit par 3 & par 5, a deux communes meſures outre l'unité, 5 & 3, deſquels 3 eſtant commun à 9, ces deux nombres 15 & 9 ne ſont point premiers entr'eux, puiſqu'outre l'unité ils ont 3 pour commune meſure.

Or pour connoiſtre ces trois ſortes d'impairs, aprés avoir mis la progreſſion de tous les impairs à l'infiny en commençant par 3, & puis les continuant, 5, 7, 9, 11, 13, &c. on verra quel nombre en meſure un autre. Et pour le voir il faut ſçavoir que chaque impair meſure tout autre impair qui le ſuit ou le precede par tout autre impair en laiſſant le double du rang qu'il tient entre les impairs, comme par ex. 3 que nous avons mis pour le premier impair, en doublant ce rang, laiſſera deux nombres, ſçavoir 5 & 7, & meſurera 9 par luy-méme; puis laiſſant deux autres nombres, ſçavoir 11 & 13, meſurera 15, par 5; puis laiſſant deux autres nombres, 17 & 19, meſurera 21 par 7, & ainſi à l'infiny.

De méme le ſecond impair 5, en doublant ſon rang d'impair, c'eſt à dire laiſſant quatre nombres, ſçavoir, 7, 9, 11, 13, meſurera 15, par le premier impair 3; puis en laiſſant quatre nombres 17, 19, 21, 23, meſurera 25 par le ſecond impair qui eſt luy-méme; & en laiſſant quatre autres il meſurera 35, par le troiſiéme impair 7. &c. à l'infiny.

De méme le troiſiéme impair 7, laiſſant ſix nombres meſurera 21 par le

premier impair 3, puis 35 par le ſecond 5; puis 49 par luy-méme, puis 63 par le quatriéme impair 9, &c. à l'infiny.

Et les ſuivans de méme, le quatriéme impair en laiſſant huit nombres, le cinquiéme en laiſſant dix, le ſixiéme 12, &c. produiront ou meſureront ceux qu'ils rencontreront dans l'ordre, par le premier 3; par le ſecond 5, &c. comme 9 eſtant au quatriéme rang des impairs, & doublant ce rang pour en laiſſer huit, meſurera 27 par 3; 45 par 5; 63 par 7, &c.

Ce qui s'appelle le Crible d'Eratoſthene que nous avons donné dans l'xI. chap. du IV. Livre.

CHAPITRE VII.

Regles pour la meſure des nombres compoſez.

I. LE nombre 2, meſure tout nombre pair.

II. 3 meſure tous nombres dont on ôte 3 tant qu'on le peut & qu'il ne reſte rien, comme 5439. en les adjoûtant l'un à l'autre 5 & 4 font 9, &c.

III. 9 a la méme proprieté, comme 4869 en les adjoûtant & rejettant 9.

IV. 4 meſure tout nombre dont il meſure les deux premiers nombres, comme 69816. puiſqu'il meſure 16 ſans reſte il meſurera de méme toute la ſomme.

V. 5 meſure tout nombre dont la premiere figure eſt ou 5 ou zero.

VI. 6 meſure tout nombre pair que peut meſurer 3 comme 4362.

VII. 7 meſure tout nombre qu'il diviſe ſans reſte.

VIII. Pour ſçavoir ſi un nombre a ſa huitiéme partie il faut prendre la moitié des trois premiers nombres & s'il ſe diviſe par 4 il ſe meſurera par 8 comme 4368, la moitié de 368 eſt 184 qui peut eſtre diviſé par 4.

Ou bien il faut doubler la ſeconde figure du nombre propoſé & quadrupler la troiſiéme & ajoûter à ces deux produits la premiere. Si 8. meſure ce produit il meſurera toute la ſomme, comme en 4368 en doublant 6 il vient 12, en quadruplant 3 il vient encore 12 qui fait 24, à quoy ajoûtant 8 le premier vient 32 qui meſure 8.

CHAPITRE VIII.

Des Nombres pairs, parfait, diminué & ſuperflu.

LES Nombres pairs ſont tous meſurez par 2; & outre cela par tous les impairs & les pairs alternativement, 6 par 3, 8 par 4, 10 par 5, 12 par 6, 14 par 7, 16 par 8, &c.

Le nombre ſuperflu eſt celuy dont les parties qui le diviſent font une

plus grande somme que le tout : comme 12, ou 24. Car la moitié de 12 est 6, le tiers est 4, le quart 3, la sixiéme 2, la douziéme 1; & toutes ces parties, 6, 4, 3, 2, 1, font 16. De méme 24 a pour sa moitié 12, pour son tiers 8, pour son quart 6, pour sa sixiéme 4, pour sa huitiéme 3, pour sa douziéme 2, & pour sa vingt-quatriéme 1. Or toutes ces parties 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, assemblées font 36.

Le nombre diminué est celuy dont les parties n'égalent pas le tout, comme 8, ou 14. Car 8 a pour sa moitié 4, pour son quart 2, & pour sa huitiéme 1, qui toutes assemblées ne font que 7. de méme 14, a pour sa moitié 7, pour sa septiéme 2 & pour sa quatorziéme 1, qui toutes assemblées ne font que 10.

Le nombre parfait est celuy dont les parties assemblées égalent le tout, comme 6, & 28. Car 6 a pour sa moitié 3, pour son tiers 2, & pour sa sixiéme 1, qui font 6. Et 28 a pour sa moitié 14, pour son quart 7, pour sa septiéme 4, pour sa quatorziéme 2, & pour sa vingt-huitiéme 1, qui font toutes 28. Ce nombre parfait est si rare qu'il n'y a que le 6 entre la dixaine, que 28 entre la centaine, que 496 entre mille, & 8128 entre les dix milles.

Et ces nombres parfaits finissent alternativement par 6 & par 8.

Pour trouver le nombre parfait il faut mettre d'ordre tous les nombres pairement pairs 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. &c. puis prendre 1 & luy ajoûter 2, & voir si le nombre qui vient de cette addition est un nombre premier & non composé; & alors on le multiplie par le dernier ajoûté comme icy est 2 qui multipliera 3 & fera 6, nombre parfait. De méme pour faire 28 aprés avoir ajoûté 1 & 2 qui ont fait 3, il faut ajoûter le suivant 4 qui fait 7 nombre premier & non composé qui estant multiplié par le dernier ajoûté 4, fera 28 nombre parfait. Mais si le nombre qui vient n'est pas premier & non composé, on le passe, & on ajoûte les pairement pairs suivans aux sommes des precedens jusqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre premier & non composé, qu'on multiplie par le dernier ajoûté, comme aprés avoir ajoûté à 7 le pairement pair 8 il vient 15 qui est un nombre second, on passe outre & l'on ajoûte le suivant pairement pair 16, il vient 31 nombre premier, qui estant multiplié par 16 dernier ajoûté fera 496 nombre parfait, &c.

CHAPITRE IX.

Du Rapport des Nombres.

Un Nombre est plus grand ou moindre qu'un autre en cinq manieres. Ou il le contient plus d'une fois precisément, comme 6 à 2; ou une fois & une de ses parties, 3 à 2; ou une fois & plusieurs de ses parties, 5 à 3; ou plusieurs fois & une de ses parties, 7 à 2; ou plusieurs fois & plusieurs de ses parties, 8 à 3.

CHAPITRE X.

Des Multiples qui contiennent plusieurs fois precisément.

I. DANS la progression naturelle des Nombres, les suivans sont multiples des precedens chacun en son rang, ou doubles, ou triples, ou quadruples, ou quintuples, &c. en sorte que tous les pairs l'un aprés l'autre sont doubles de tous les impairs & pairs qui se suivent : comme

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, &c. le premier pair 2 est double d'1. le second pair 4 est double de 2 ; le troisiéme pair 6 est double de 3, le quatriéme pair 8 est double de 4, le cinquiéme pair 10, est double de 5, & ainsi à l'infiny.

Les triples en passent deux (excepté le premier triple 3 qui n'en passe qu'un, sçavoir le nombre 2) & sont triples de tous les pairs & impairs qui se suivent, comme aprés 1 & 2. 3 est triple d'1, aprés 4 & 5, 6 est triple de 2 ; aprés 7 & 8, 9 est triple de 3 ; apres 10 & 11, 12 est triple de 4 ; apres 13 & 14, 15 est triple de 5, &c. à l'infiny.

Les quadruples en passent trois, apres 1, 2 & 3, 4 est quadruple d'1; apres 5, 6 & 7 ; 8 est quadruple de 2 : apres 9, 10, & 11, 12 est quadruple de 3, apres 13, 14 & 15, 16 est quadruple de 4, &c. à l'infiny.

Les quintuples en passent quatre, apres 1, 2, 3, & 4, 5 est quintuple d'1. apres 6, 7, 8 & 9, 10 est quintuple de 2. apres 11, 12, 13 & 14, 15 est quintuple de 3, &c.

Les sextuples en passent cinq, les septuples en passent 6 & ainsi à l'infiny, chaque Multiple en passe un moins que sa denomination, les Octuples 7, les Neufcuples 8, &c.

Or les doubles, quadruples & autres pairs font toûjours leurs nombres pairs ; & les triples, quintuples & autres impairs font alternativement leurs nombres pairs & impairs.

CHAPITRE XI.

Des Surparticuliers qui contiennent une fois & une partie.

DANS la progression naturelle ceux qui se suivent immediatement sont surparticuliers ou sousparticuliers de ceux qui les precedent ou qui les suivent, à commencer par le nombre 3 qui est surparticulier de 2 lequel est double d'1. &c.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, &c.

Or la premiere espece qu'on appelle Sesquialtere ou d'un & demy naist des doubles avec les triples ; la seconde Sesquitierce naît des triples avec les quadruples, &c.

Double	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. &c.
Sesquialt.	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30. &c.
Sesquitier.	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45. &c.
Sesquiquart.	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60. &c.
	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75. &c.

Le premier rang des Nombres avec le second est en proportion double.

Le second avec le troisiéme en proportion sesquialtere, & ce troisiéme est triple du premier, ainsi la proportion triple vient de la double & de la sesquialtere.

Le troisiéme avec le quatriéme en proportion sesquitierce, & ce quatriéme est quadruple du premier.

Le quatriéme avec le cinquiéme est en proportion sesquiquarte, & ce 5e est quintuple du premier.

CHAPITRE XII.

Des Surpartiens qui contiennent une fois & plusieurs parties.

POur en avoir toutes les especes il faut mettre de suitte la progression naturelle des nombres à commencer par 3; & leur opposer tous les impairs de suite à commencer par 5. ainsi

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c.
5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, &c.

Les premiers 3 & 5, s'appellent Surbipartiens; les seconds 4 & 7, Surtripartiens; les troisiémes 5 & 9 Surquadripartiens, &c.

Ainsi ce sont autant d'especes differentes, & si l'on les veut separément continuer il faut doubler chaque nombre de chaque espece, puis le tripler, &c. comme pour la premiere il faut doubler 3 & 5 & l'on aura 6 & 10, puis 9 & 15, c'est à dire ajoûter de suite les deux premiers termes de la proportion. Ainsi pour les seconds 4 & 7. on mettra 8 & 14, 12 & 21, &c.

CHAPITRE XIII.

Des Multiples surparticuliers & surpartiens qui contiennent plusieurs fois, & une ou plusieurs parties.

CEs deux proportions sont composées des simples Surparticulieres & Surpartientes & des Multiples, c'est à dire que les nombres sont contenus plusieurs fois & outre cela une ou plusieurs parties comme 2 en 5, deux fois & la moitié, & elle s'appelle double & demy, 3 en 10, triple & & tiers, & de méme 3 en 11, triple & deux tiers. 5 en 13 double & trois cinquiémes.

CHAPITRE XIV.

Comment toutes les Proportions naissent de l'égalité & en quel ordre.

BOëce s'est contenté d'appliquer à trois nombres seulement cette production qu'il appelle une Science tres-profonde ; & méme ses Commentateurs y ont trouvé du mystere qu'ils ont fait remonter jusqu'à la Trinité, qui de l'égalité de ses trois personnes a produit l'inégalité de toutes choses : Mais Salinas en son premier Livre de Musique chap. 27. a étendu cette production & ses Regles à tant de nombres qu'on voudra.

1°. L'égalité produit les doubles ; puis des doubles viennent les triples : des triples les quadruples : Des quadruples les quintuples &c. à l'infiny.

2°. Les Multiples renversez produisent les surparticuliers ;
Des doubles viennent les sesquialteres ;
Des triples les sesquitiers ;
Des quadruples les sesquiquarts, &c. à l'infiny.

3°. Les suparticuliers renversez produisent les surpartiens :
Des sesquialteres viennent les surbipartiens :
Des sesquitiers viennent les surtripartiens :
Des sesquiquarts les surquadripartiens.

4°. Les surparticuliers directement posez produisent les Multiples surparticuliers chacun selon son espece.

Les surpartiens non renversez produisent les Multiples surpartiens chacun selon son espece.

REGLE.

Ayant posé trois Nombres pour en produire trois autres.

1°. Il faut égaler le premier au premier : 2°. le second au premier & au second : 3°. le troisiéme au premier & au second doublé ou pris deux fois & enfin au ttoisiéme.

Exemples.

I. Des doubles qui naissent des égaux posez trois fois.

1	1	1
1	2	4

Le premier nombre inferieur sera produit en l'égalant au premier superieur, 1 : le second en joignant le premier & le second superieur, 1 & 1, qui font 2 : & le troisiéme en prenant le premier 1, & puis deux fois le second 1 & 1, c'est à dire 2 qui avec le premier fait 3, & enfin le troisiéme 1, qui avec 3 fait 4.

Des triples qui naissent des doubles par la méme regle.

1	2	4	Des Triples viennent les quadruples	1	3	9	
1	3	9		1	4	16	&c.

II. Des surparticuliers qui naissent des multiples renversez par la méme regle.

Les sesquialteres des doubles renversez			Les sesquitiers des triples.			Les sesquiquarts des quadruples.			Les sesquiquints des quintuples.		
4	2	1	9	3	1	16	4	1	25	5	1
4	6	9	9	12	16	16	20	25	25	30	36

III. Des surpartiens qui naissent des surparticuliers renversez.

Les surbipartiens des sesquialteres.			Les surtripartiens des sesquitiers.			Les surquadripartiens des sesquiquarts.			
9	6	4	16	12	9	25	20	16	&c.
9	15	25	16	28	49	25	45	81	

IV. Des surparticuliers directement posez viennent les Multiples surparticuliers par la méme regle.

Des sesquialteres les doubles sesquialteres.			Des sesquitiers les doubles sesquitiers.			
4	6	9	9	12	16	&c.
4	10	25	9	21	49	

V. Des surpartiens directement posez viennent les Multiples surpartiens.

Des surpartiens les doubles surbipartiens.			Des surtripartiens les doubles surtripartiens.		
7	15	25	16	28	49
9	24	64	16	44	121

CHAPITRE XV.

Retour ou Reduction des proportions inégales, à l'égalité par cét ordre.

I. LES Multiples se resoudront à l'égalité, en descendant des plus grandes aux moindres; des quadruples aux triples; des triples aux doubles, & des doubles à l'égalité.

II. Les multiples ſurpartiens aux multiples ſurparticuliers.
III. Les ſimples ſurpartiens aux ſimples ſurparticuliers.
IV. Et les ſurparticuliers aux multiples, & des multiples à l'égalité, par la meſme voye qu'ils en avoient eſté produits.

Regle.

Ayant placé les termes de la proportion qu'on veut reduire

1°. Poſer le premier nombre pour le premier terme de la Reduction.

2°. Oſter le premier du ſecond, & mettre ce qui reſte pour le ſecond terme de la Reduction.

3°. Oſter du troiſiéme le premier, & deux fois le reſte du ſecond, c'eſt à dire deux fois le ſecond terme déja poſé pour la reduction, & l'on aura le troiſiéme terme de la Reduction.

Exemples.

De la Reduction des quadruples aux triples, des triples aux doubles, des doubles à l'égalité.

quadruples	8	32	128
triples	8	24	72
doubles	8	16	32
égaux.	8	8	8

CHAPITRE XVI.

Trouver en quelque Proportion que ce ſoit tant de termes continuellement proportionnaux qu'on voudra.

IL faut ſuppoſer que chaque multiple produit ſon ſemblable ſurparticulier; les doubles les ſeſquialteres; les triples les ſeſquitiers; les quadruples les ſeſquiquarts; les quintuples les ſeſquiquints, &c.

Or chaque multiple en produira autant de ſurparticuliers qu'il ſera éloigné de l'unité, ou ſelon le rang qu'il tiendra dans ſon eſpece de multiple: par exemple, 2 qui eſt le premier double ne produira qu'un ſeſquialtere; ſçavoir 3: & 4, qui eſt le ſecond double en produira deux, ſçavoir 6 & 9: 8 en produira trois: 16 en produira quatre; & ainſi de tous les autres. Tellement que ſuivant la quantité qu'on aura beſoin de ſurparticuliers & ſuivant leur eſpece, il les faudra chercher ſous le rang du multiple de ſon eſpece.

Si l'on en a besoin de 5 de 6 ou de 7, on les prendra au 5 ou 6 ou septiéme rang du multiple de l'espece qu'on voudra produire; du double pour les sesquialteres, du triple pour les sesquitiers, du quadruple pour les sesquiquarts, &c.

Exemple.

Des Sesquialteres produits par les doubles.

Double	1	2	4	8	16	32	64	128
Sesquialt.		3	6	12	24	48	96	192
			9	18	36	72	144	228
Diagonal.				27	54	108	216	432
					81	162	324	648
						243	486	972
							729	1458
								2187

Des Sesquitiers produits par les triples.

Triple	1	3	9	27	81	243
Sesquit.		4	12	36	108	324
			16	48	144	432
				64	192	576
					256	768
						1024

Remarquez que chaque rang inferieur, en long, garde la proportion du premier rang perpendiculairement posée ou sesquialtere ou sesquitierce, &c. diagonalement, une proportion plus grande de l'unité que n'est celle du premier rang, triple si le premier rang est double, quadruple s'il est triple, &c.

CHAPITRE XVII.

De la Composition des Proportions.

I. SI l'on joint les deux premieres especes surparticulieres, c'est à sçavoir la sesquialtere & la sesquitierce, il en viendra la premiere espece multiple, sçavoir la double, comme 2, 3, 4. 3 estant sesquialtere à 2, & 4 sesquitier à 3, composent la double 2 & 4.

Ou en faisant servir le milieu 3 de premier nombre, & luy donnant un double qui sera 6; il faudra leur trouver un milieu qui soit sesquialtere à l'une des extremitez & sesquitiers à l'autre, comme 3, 4, 6, & alors il sera toûjours vray que la double est unie par la sesquialtere, & par la sesquitierce; 6 estant sesquialtere à 4, & 4 sesquitiers à 3.

II. De la premiere espece de multiple, & de la premiere espece de surparticuliere, c'est à sçavoir la double & la sesquialtere, vient la triple, comme 6, 12, 18. Car 12 est double de 6, & sesquialtere à 18 qui est triple à 6. Ou 6, 9, 18. | 18 est double à 9, triple à 6, à qui 9 est sesquialtere.

III. De la seconde espece de multiple & de la seconde espece de surparticuliere, c'est à sçavoir la triple & la sesquitierce vient la quadruple, com-

me 3, 9, 12 : 9 estant triple à 3, & 12 sesquitiers à 9 & quadruple à 3.

IV. De la quadruple & de la sesquiquarte, vient la quintuple comme 4, 16, 20; 16 estant quadruple à 4, & sesquiquart à 20, qui est quintuple à 4.

V. De la quintuple & sesquiquinte, vient la sextuple comme 5, 25, 30.

VI. Et ainsi à l'infini chaques multiples jointes à leurs surpaticulieres, produiront la multiple suivante, comme la double jointe à la sesquialtere produira la triple: avec la sesquitierce, produira la quadruple: la quadruple jointe avec la sesquiquarte produira la quintuple, la quintuple avec la sesquiquinte produira la sextuple: & la sextuple avec la sexquisexte produira la septuple, &c.

CHAPITRE XVIII.

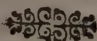
Des Proportions ou Proportionnalitez.

IL y en a de trois sortes, Arithmetique, Geometrique & Harmonique. L'Arithmetique où les differences ou distances sont egales, comme 1, 2, 3. 2, 4, 6. ou comme 3, 6, 9, 12.

La Geometrique où les proportions sont egales, comme 1, 2, 4, 8, doubles: 3, 9, 27 triples, ou comme 4 à 8, ainsi 3 à 6 double.

L'Harmonique où les proportions des extrêmes sont egales aux proportions des differences du milieu avec les extrêmes, comme 6, 4, 3, la proportion des deux extrêmes 6 & 3 est double, comme la proportion des differences de 4 à 6 qui est 2, est double de la difference de 4 à 3 qui est 1, ainsi 6, 3, 2, 6 est triple de 2, comme 3 la difference de 3 à 6, est triple d'1, la difference de 3 à 2.

Or on appelle cette troisiéme Harmonique, parce qu'elle comprend toutes les Consonances que les Anciens reconnoissoient dans la Musique, soit dans les differences, soit dans les rapports des extrêmes ensemble & avec le milieu, & des differences encore avec les extrêmes & le milieu, qui font tous ces nombres, 1, 2, 3, 4, 6, dans lesquels sont toutes les Consonances, le Diapason, ou Octave dont la proportion est double, & qui se rencontre icy entre 1 & 2, 2 & 4, 3 & 6: le Diapenté ou Quinte dont la proportion est sesquialtere, entre 2 & 3, & 4 & 6. Le Diatessaron ou Quarte, dont la proportion est sesquitierce entre 3 & 4. Le Diapason-Diapenté ou la Douziéme dont la proportion est triple, entre 1 & 3, & 2 & 6. Le Disdiapason ou double octave ou Quinziéme dont la proportion est quadruple entre 1 & 4: si l'on veut encore comparer 1 à 6 on aura la Dix-neufviéme ou la quinte triplée.



CHAPITRE XIX.

Des Figures des Nombres.

IL y en a de lineaires comme 2, de ſuperficiels ou plans comme 4, de ſolides comme 8. parmy les plans il y en a de triangulaires comme 3, des Tetragones 4, Pentagones 5; & parmy les ſolides il y a des Pyramides, des Cubes, Trigones, Tetragones, &c. Il y en a de plus longs que larges d'une unité comme 6, & de plus longs de plus d'une unité comme 15, &c. & ces figures des nombres appartiennent plutoſt à la Geometrie qu'à l'Arithmetique.

Ce qu'il y a ici de neceſſaire c'eſt l'Extraction des Racines Quarrées & Cubiques, que nous allons donner apres avoir enſeigné un nouvel uſage de

La Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100.

LA Table de Pythagore ayant eſté dreſſée pour la multiplication des ſimples nombres l'un par l'autre juſqu'à dix, ſert encore pour tous les nombres compoſez. Comme par exemple ſi l'on a trouvé que 2 fois 2 font 4, on trouvera auſſi que 2 fois 12, en joignant les deux premiers nombres du premier rang de la Table, font 24 en joignant auſſi les deux premiers nombres du ſecond rang; & que 2 fois 123, en joignant les trois premiers nombres du premier rang, font 246 en joignant les trois premiers du ſecond rang; & que 3 fois 123 font 369 en joignant les trois premiers nombre du troiſiéme rang. Ainſi de tous les autres nombres multipliez par quelque nombre que ce ſoit qui ſeront dans le meſme rang.

Mais comme les nombres qu'on propoſe à multiplier, ne ſont pas toûjours de ſuite, & que la multiplication produit ſouvent un nombre compoſé de deux figures; voicy ce qu'il faut obſerver en l'un & l'autre cas. Suppoſé par exemple, qu'on propoſe 3578 à multiplier par 3, il faut prendre d'abord dans le rang de 3 qui eſt le multiplicateur, les nombres qui repondent

dent à chaque figure du nombre à multiplier 3578, qui sont 9, 15, 21, 24: Et commençant par la premiere figure à droite qui est 4, on la mettera toute seule pour la premiere figure du multiplicateur au dessous de 8 premiere du sujet: puis on joindra les figures separées de deux en deux selon leur simple valeur comme on fait à l'addition, en allant vers la gauche; en sorte que quand elles ne seront pas separées on ne les ajoûtera pas ensemble: Ainsi l'on joindra 2 avec 1 qui font 3 qu'on mettra pour la seconde figure de la multiplication; puis 2 & 5 qui font 7 qu'on mettra pour la troisiéme figure de la multiplication, & enfin 1 & 9 qui font 10 qu'on mettra pour les deux dernieres figures de la multiplication qui sont les premieres à gauche; & ainsi l'on aura pour la multiplication de 3578 par 3; 10734, qu'on mettra sous le sujet.

Or il faut remarquer qu'on ne joint jamais les deux figures qui sont jointes d'elles-mesmes, comme aussi on n'en joint point deux qui sont seules & separées l'une de l'autre; mais seulement on en joint une de deux qui sont separées avec une autre accouplée. Exemple; si on propose 2723 à multiplier par 3, apres avoir tiré les nombres qui sont dans le rang de 3, sous ceux du nombre à multiplier, qui sont 6, 21, 6, 9, en commençant à droite on mettra separement les deux nombres 9 & puis 6, sans les joindre; puis on separera les deux suivans 21, parce qu'ils sont joints d'eux-mesmes, & l'on mettra 1, puis on joindra 2 avec 6 qui suit & l'on aura 8. Tellement que la multiplication entiere de 2723, par 3, sera 8169. S'il y avoit plusieurs figures au multiplicateur, on tirera separement de la Table celles qui leur répondent, & aprés l'operation on ajoûtera les deux ou trois sommes de la multiplication pour n'en faire qu'une.

Cette maniere de multiplier ne se peut faire sans avoir devant les yeux la Table de Pythagore. La multiplication des nombres simples l'un par l'autre jusqu'à 10, se peut suppléer par cette adresse. Il faut soustraire le petit nombre de sa dixaine, autant de fois que le plus grand est éloigné de 10. Par exemple, si l'on veut sçavoir combien font 7 fois 9, il faut soustraire 7 de sa dixaine 70, une fois, parce que 9 n'est éloigné de 10 que d'un; & il y aura 63 que font 7 fois 9. Ainsi 8 fois 9 font 72. | 8 fois 8, 64. | 7 fois 8, 56, &c.

Comme l'addition est plus facile que la multiplication, nous allons donner le moyen de pratiquer celle-cy par celle-là, lorsque le multiplicateur n'a que deux figures, dont la premiere est l'unité comme 10, 11, 12, &c. ce qui est commode pour sçavoir reduire par cette voye les pistoles en livres, soit qu'elles en valent 10 ou 11; & les sols en deniers.

Si l'on multiplie par 10, il ne faut qu'ajoûter un zero au devant du nombre à multiplier, comme si l'on demande combien valent en livres 35 pistoles à 10 livres, on mettra un zero à 35, & l'on aura 350 livres que valent 35 pistoles.

Si l'on multiplie par 11, on mettra le nombre à multiplier l'un sur l'autre deux fois en reculant à gauche une des deux d'un rang, comme si l'on de-

mande combien valent 35 loüis d'or à 11 livres la piece, on mettra ainsi 35 &
35
puis on fera l'addition qui donnera 385 livres. On auroit eu la mesme chose en plaçant entre les deux figures du nombre à multiplier la somme des deux jointes ensemble; & si leur somme a deux figures, on mettra la premiere au milieu, & on joindra la seconde à la premiere figure du nombre à multiplier. Comme si on demande combien valent 35 loüis d'or, on mettra entre 3 & 5 la somme de 3 & 5 qui est 8, ainsi 385: mais si on demandoit combien en valent 79; comme la somme de 7 & 9 fait 16, on mettra 6 entre-deux, & on joindra 1 à 7, & l'on aura ainsi 869, que valent en livres 79 loüis d'or.

Si l'on multiplie par 12, on mettra le nombre à multiplier trois fois en reculant l'un des trois. Ainsi 35 par 12, seroit mis ainsi 35 puis on feroit l'ad-
35
35
dition qui rendroit cette somme 420, qui seroit par exemple la valeur de 35 sols en deniers. Si l'on multiplioit par 13, par 14, &c. on mettroit le nombre à multiplier quatre ou cinq fois, c'est à dire une fois davantage que ne vaut la premiere figure du multiplicateur en reculant toûjours d'un rang vers la gauche le nombre à multiplier, & puis faisant l'addition: mais il suffit de se servir de cette voye pour la reduction des loüis d'or en livres & des sols en deniers, quand on veut éviter la multiplication.

CHAPITRE XX.

De l'Extraction des Racines Quarrées & Cubiques.

ON appelle Nombre Quarré le produit d'un Nombre qui s'est multiplié par luy-mesme, & le nombre qui s'est multiplié s'appelle la Racine de ce quarré: comme 2 se multipliant luy-mesme produit 4, qui est un quarré, dont 2 est la racine. On appelle nombre Cubique ou Cube un nombre venu d'un autre, qui apres s'estre multiplié une fois par luy-mesme, multiplie encore par luy-mesme le produit de la premiere multiplication, comme 2 s'estant multiplié luy-mesme & ayant produit 4, multiplie encore 4 par luy-mesme 2, & produit 8 qui sera un nombre Cube dont 2 est la racine.

Avant que d'entreprendre l'Extraction des racines quarrées ou cubiques, il faut sçavoir par cœur ou avoir devant les yeux les quarrez ou cubes, dont les simples nombres jusqu'à 10 sont les racines.

Racines.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quarrez.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Cubes.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Regles.

I. IL faut partager toutes les figures du nombre proposé par des points, dont le premier sera mis sous la premiere figure en commençant à droite, & dans les quarrez on n'en passera qu'une, & puis on marquera la troisiéme, puis la cinquiéme, la septiéme, &c. dans les Cubes on en passera deux, & puis l'on marquera la quatriéme, la septiéme, la dixiéme, &c.

II. On mettra dans le milieu de la place où l'on veut faire ses operations, les nombres particuliers à chaque Extraction de racine. Pour les quarrées on prendra 20, qu'on mettra ainsi entre deux lignes —20—. Pour les Cubiques on prendra 300 & 30, qu'on mettra ainsi au milieu au dessous l'un de l'autre chacun entre deux lignes—300—

—30—.

III. On commencera les operations par le point qui est le premier à gauche; & l'on en tirera le plus grand quarré, ou le plus grand Cube qui s'en pourra tirer; dont on mettra la racine ou quarrée ou cubique, à part au quotient, & on écrira encore ce quotient sous le premier point de l'operation qui est vers la gauche.

IV. Avec ce quotient on multipliera le quotient écrit sous le premier point, on fera la soutraction, & l'on mettra au dessus du point ce qu'il y aura de reste en effaçant la figure ou les figures du premier point, comme on fait en la division ordinaire.

V. Pour avoir un nouveau quotient pour l'operation du second point qui suit, il faut porter le quotient precedent & le placer vis-à-vis de 20 à gauche, pour la racine quarrée; ou vis-à-vis de 30 à gauche pour la racine cube, & prendre le quarré du mesme quotient & le placer encore à gauche au dessus & vis-à-vis du nombre 300. Cela fait on multipliera, en la racine quarrée 20, par ce premier quotient; & 300 en la racine Cube par le quarré du premier quotient.

VI. Le produit de cette multiplication servira de diviseur pour trouver un nouveau quotient du second point, que vous mettrez à part avec le precedent, & encore vous le placerez seul à la droite de 20 pour la racine quarrée, & puis vous en prendrez le quarré que vous mettrez au dessous du mesme côté droit; & pour la racine cube vous le mettrez à droite vis-à-vis de 300. puis vous mettrez son quarré au dessous vis-à-vis de 30 du mesme côté, & puis son cube au dessous du mesme côté. Cela fait vous multiplierez l'un par l'autre les trois du premier rang en la ligne de 20 pour la racine quarrée, & au produit vous ajoûterez le quarré qui est au dessous, puis vous ferez la soutraction du second point par le moyen de ce produit & de cette addition.

Et pour la Racine Cubique, vous multiplierez les trois du premier rang, puis les trois du second rang, & aux deux sommes de ces multiplications ajoûtées ensemble, vous ajoûterez le nombre seul qui est le Cube du quo-

tient, puis vous ferez la soutraction du second point par le produit de ces deux multiplications & de cette addition, ajoûtez ensemble.

VII. Pour le troisiéme point suivant, prenez tout le quotient & le mettez à gauche, pour la racine quarrée vis-à-vis de 20 : multipliez l'un par l'autre & portez le produit sous le troisiéme point afin d'avoir un nouveau quotient que vous mettrez avec les deux precedens à part, & que vous poserez seul à côté droit vis-à-vis de 20, & son quarré au dessous du mesme côté droit. Vous multiplierez les trois nombres du premier rang de 20 l'un par l'autre, vous ajoûterez au produit le quarré du quotient qui estoit au dessous du quotient à côté droit, puis vous ferez la soutraction comme au point precedent, & vous continuerez de la sorte toutes les operations qu'il y aura à faire : c'est à dire que vous mettrez tout le quotient à gauche de 20, & vous multiplierez 20 par ce quotient ; vous porterez le produit sous le point suivant qui reste, vous chercherez un nouveau quotient que vous ajoûterez à tous les precedens, & que vous mettrez seul vis-à-vis de 20 à droite, & son quarré au dessous : vous multiplierez les trois nombres du premier rang l'un par l'autre, vous ajoûterez au produit le quarré du dernier quotient qui est au dessous à droite, & vous ferez la soutraction. Pour la racine Cubique vous pratiquerez aussi la regle precedente.

S'il ne reste rien apres la derniere operation, c'est à dire que le nombre proposé estoit Quarré ou Cube : S'il reste quelque chose, il ne l'estoit pas, & l'on met ce reste en fraction apres la racine tirée, sur le nombre proposé.

EXEMPLE

Pour l'Extraction de la Racine Quarrée.

SI l'on propose 6765201, on le partagera ainsi en commençant à droite 6765201, s'il y avoit eu une figure davantage il y en auroit eu deux sous le dernier point à gauche ; & ce dernier point à gauche va estre le premier pour l'operation.

Apres cette premiere preparation, on mettra 20 au milieu de deux petites lignes, à l'endroit où vous voulez faire vos operations.

Puis en commençant par la gauche du nombre proposé, vous chercherez qu'elle est la racine du premier point, qui est icy 6 ; & comme 6 n'est pas un nombre quarré, vous prendrez le plus grand quarré qui est le plus proche au dessous de 6, qui est 4, dont vous mettrez la racine qui est 2, au quotient en un lieu separé ; & vous l'écrirez encore sous 6, puis vous le multiplierez par le quotient 2, & vous retirerez le produit 4, du nombre 6, en effaçant l'un & l'autre & mettant dessus 6 le reste 2, comme on fait à la division ordinaire.

Pour la seconde operation, il faut mettre le quotient 2 vis-à-vis, & à la gauche de 20, ainsi 2 — 20 : Puis multiplier 20 par 2, il viendra 40 qu'on portera sous le second point, qui avec la figure restée du precedent fait

276. Et 40 servira de diviseur pour trouver un nouveau quotient qui sera 6, qu'on mettra premierement à part avec le premier quotient qui aura ainsi 26 : puis on portera ce nouveau quotient 6 vis-à-vis & à côté droit de 20, puis on mettra au dessous de 6 du mesme côté son quarré 36, & ainsi l'on aura 2 — 20 — 6
36.

Alors on multipliera l'un par l'autre les trois nombres 2—20—6, qui feront 240, à quoy l'on ajoûtera le quarré de 6 qui est 36, & l'on aura 276, qu'on retirera du second point 276, & il ne restera rien.

Pour l'operation du troisiéme point, on mettra tout le quotient 26 à gauche vis à vis de 20, ainsi 26—20 : On multipliera 20 par 26, afin d'en faire un diviseur pour avoir un nouveau quotient. Et comme il en vient un produit qui est plus grand que le troisiéme point qui n'est que 52, au lieu que ce produit est 520 ; on fera comme à la division, lorsque le diviseur est plus grand que le nombre à diviser, on met un zero au quotient & l'on n'opere rien. Ainsi le quotient est 260.

Pour l'operation du quatriéme point, on écrira tout le quotient 260 à gauche vis-à-vis de 20, ainsi 260 — 20, puis on multipliera 260 par 20, & du produit 5200, on s'en servira pour chercher un nouveau quotient du nombre du quatriéme point avec ce qui a resté du precedent & le tout estant 5201, en qui 5200 est une fois, on mettra au quotient 1 ; puis on portera ce quotient 1 vis-à-vis de 20 à droite, & puis son quarré au dessous qui est encore 1. Puis on multipliera les trois nombres du premier rang l'un par l'autre, sçavoir 260 par 20 & par 1, & il viendra 5200 à quoy l'on ajoûtera le quarré 1, qui fera 5201, qu'on retirera du nombre proposé, & il ne restera rien. Ainsi 6765201 estoit nombre quarré dont la racine est 2601, qui en effet se multipliant elle-mesme reproduira 6765201.

EXEMPLE.

Pour l'Extraction de la Racine Cubique.

SI l'on propose 238328, on le punctuera ainsi 238328. Puis on mettra 300 & 30, au milieu chacun entre-deux petites lignes, & l'un sur l'autre. Puis apres avoir pris la racine du cube le plus prochain des trois figures du premier point 238, qui est 216, on en mettra la racine 6 au quotient, & au côté gauche de 30, & le quarré de 6 qui est 36 au côté gauche de 300; puis on ôtera son cube 216, du premier point du nombre proposé 238, & il restera 22 ; & l'operation de ce premier point sera telle,

22
238 36 —300— (6
216 6 — 30

Pour l'operation du second point, qui avec les deux figures de reste du

precedent fait 22328, on multipliera 300 par 36, & il viendra 10800 qui suffira pour servir de diviseur à 22328 pour trouver un nouveau quotient qui sera 2, qu'on mettra premierement à part avec le precedent qui fera 62: puis on le placera au côté droit de 300: & ensuite son quarré 4 au côté droit de 30, & enfin son cube 8, au dessous du mesme côté. Ainsi l'on aura pour cette operation 36 — 300 — 2

6 — 30 — 4 (62.
8

On multipliera les trois nombres du premier rang 36—300—2, l'un par l'autre & il viendra 21600: puis on multipliera aussi les trois du second rang l'un par l'autre 6 -- 30 -- 4, & il viendra 720, on adjoûtera ensemble ces deux sommes & puis 8 qui est au dessous, & le tout fera 22328, qui estant retirez de 22328, il ne reste rien; ce qui montre que le nombre proposé estoit cube, & que sa racine cubique est justement 62. En effet si l'on prend le cube de 62, on aura 238328.

NOUS rapporterons dans le X. Livre le reste de la Theorie des Nombres, apres l'Algebre en François, avec l'application aux Regles de Pratique.

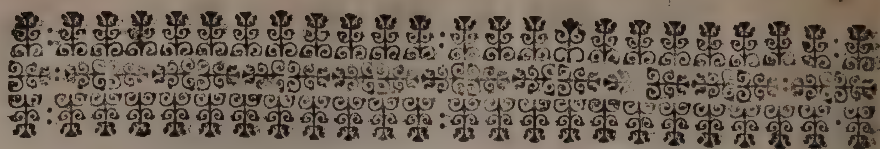


ARTIS ET SCIENTIÆ NUMERANDI PARS ALTERA,

ARITHMETICA SPECIOSA SIVE ALGEBRA;

TRIBUS LIBRIS, VIII°. IX°. ET X°. LATINE' ET GALLICE' EXPLICATA:

CUM NOVA NUMERORUM ANALYSI.

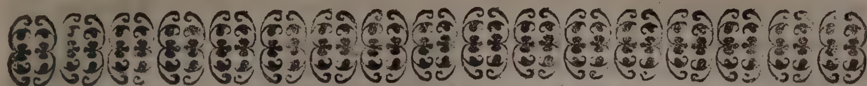


PROLOGUS

IN ALGEBRAM VERSIBUS EXPLICATAM.

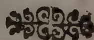


Bscurissimam Artem Algebram, ut ipsi fatentur qui in ea elucidanda desudarunt, Versibus explicare aggredimur; imò facillimam Tibi, Lector Amice, promittimus, promissisque fidem daturos confidentissimé pollicemur. Qua ratione id præstiterimus, te pluribus Gallica Præfatio, claré satis Latina Carmina docebunt. Hac igitur spe fretus, perge quisquis es, qui ardes desiderio adipiscendæ Artis formosissimæ, quæ inter alias haud immeritò Speciosæ nomen obtinuit. Neque enim te, post emensa Arithmeticæ vulgaris maria immensa, ut Argonautarum more pretiosum illud vellus consequereris, jamjam portum tenentem, diutiùs remorabimur. Quin potiùs, à nobis Ariadnes filum accipe, quo, te inextricabilibus hujus Labyrinthi ambagibus absque errore expedias, impervios tàm reconditi thesauri accessus penetres, aureumque spolium certus offendas, securus auferas, gaudens asportes, fruarisque; atque illius ope universæ Arithmeticæ divitias omnes in numerato habeas. Utere & vale.



AVANT-PROPOS
OU
PREPARATION POUR L'INTELLIGENCE DE L'ALGEBRE.

QUELQUE obſcure que ſoit l'Algebre, de l'aveu meſme de ceux qui ont travaillé à l'éclaircir, j'oſe promettre à mes Lecteurs de leur en donner une parfaite intelligence, par une voye courte, facile & débaraſſée de tout ce qui en cauſoit l'obſcurité : & j'eſpere que ceux qui en feront l'eſſay, en liſant ſeulement nos Vers Latins, demeureront d'accord que cette promeſſe n'eſt ny vaine ny trop hardie. Pour y diſpoſer ceux qui n'entendent que le François, nous allons rendre raiſon de la methode dont nous nous ſommes ſervis pour arriver à bout de noſtre deſſein, apres avoir dit que l'Algebre en effet eſt un treſor caché, qu'on ne peut découvrir ſans guide, qu'on ne peut appercevoir ſans lumiere, qu'on ne peut mettre en uſage ſans art, & dont on ne peut conſerver la poſſeſſion ſans un puiſſant ſecours de memoire & d'imagination. Et nous pretendons avoir pourveu à toutes ces choſes, par l'ordre que nous avons gardé, par la clarté & l'arrangement des preceptes, par le dégagement de tout ce qui embaraſſoit cet Art, par les caracteres que nous y avons employez, qui portant avec eux leur ſignification, ou du moins la marque de leur puiſſance, aident l'imagination & en facilitent les operations ; par nos Vers Latins, qui ſoulagent la memoire & délaſſent l'eſprit, ou par nos Explications Françoiſes, qui eſtant bréves & nettes produiſent auſſi le meſme effet. Ce que nous allons voir dans les articles qui ſuivent.



De la Nature de l'Algebre & de ſon Origine.

POur commencer par le mot d'Algebre, il eſt certain qu'il eſt Arabe, & que ce n'eſt plus le nom d'un Auteur appellé Geber comme on l'avoit crû autrefois; mais c'eſt un terme particulier qui ſignifie en cette langue, Rétablir ou Reſtituer, c'eſt à dire remettre au jour le nombre inconnu, en luy rendant ce qu'on luy avoit ôté dans les operations, ou luy ôtant ce qu'on luy avoit attribué & qui ne luy eſtoit pas dû. Et c'eſt en effet en quoy conſiſte l'Art de l'Algebre, de ſuppoſer qu'elle tient entre ſes mains le nombre qu'on luy propoſe à découvrir, mais envelopé ſous les conditions de la queſtion, qu'elle dévelope en y ſatisfaiſant de meſme que ſi elle agiſſoit ſur ce nombre, & la fin de ſon operation eſt la découverte de ce nombre quelque caché qu'il ſoit.

Cet effet a paru ſi merveilleux qu'on n'a pû luy trouver un nom qui en exprimât l'excellence. Les uns l'ont appellé le Grand Art : les autres un Art Angelique & purement ſpirituel : d'autres ont voulu monter plus haut & l'appeller Divin, parce qu'il découvre les choſes cachées d'une maniere preſque ſurnaturelle : enfin on a jugé plus à propos de luy laiſſer ſon nom d'Algebre, qui eſtant inconnu luy-meſme, en exprime mieux la nature & ſa maniere d'agir.

Il y en a de deux ſortes, l'une Arithmetique & l'autre Geometrique. L'Algebre Arithmetique eſt celle qui fait ſes operations par des nombres ou entiers, ou rompus, qu'on appelle rationnels; c'eſt à dire, qui ont un rapport déterminé, ou une proportion certaine qu'on peut exprimer par des nombres. L'Algebre Geometrique eſt celle dont les operations rencontrent des nombres qu'ils appellent ſourds & irrationels, parcequ'à proprement parler ce ne ſont pas des nombres, & qu'ils ne ſe peuvent jamais exprimer par de veritables nombres. Comme cette Algebre n'appartient point à l'Arithmetique mais à la Geometrie, nous la laiſſerons aux Geometres.

Quant à l'origine de l'Algebre, elle a cela de commun avec celle de tous les autres Arts ou inventions des hommes, d'eſtre incertaine & inconnuë. Et c'eſt mal connoiſtre la nature de l'eſprit de l'homme, d'accuſer de negligence ou d'ingratitude les Ecrivains ou Hiſtoriens, de n'avoir pas eu ſoin de laiſſer à la poſterité le nom des Inventeurs des Arts qui ont paru de leur temps. Car l'eſprit de l'homme quelque relevé qu'il ſoit, n'eſtant point capable de porter d'abord les choſes à leur derniere perfection, il n'y a point d'Art dont on ait jamais pû attribuer l'invention à un ſeul homme. Et quand on voudroit ſuppoſer qu'il y auroit eu des genies ſi excellens, qu'ils auroient pû rendre leurs inventions ſi parfaites & achevées, qu'il n'y eut eu rien à ajoûter; il faudroit auſſi ſuppoſer que tous les hommes de leur temps euſſent eſté capables non ſeulement d'apprendre ce qui auroit eſté inventé de nouveau, mais de le mettre en execution auſſi bien que s'ils en

eussent pris les instructions dés leur jeunesse. Et si c'est quelque Art dont l'execution dépend de la main des Ouvriers, pour en faire la matiere & les machines ; comme par exemple, l'Orgue, les Montres ou Horloges portatives, les Canons, & l'Imprimerie ; il faut encore supposer deux choses: la premiere, qu'on a trouvé des Ouvriers si habiles, que sans avoir eu d'autres Maistres ny de modeles, ils ayent fondu & formé des tuyaux, des ressorts, des moules, & des caracteres, avec toutes les autres machines necessaires, & tout cela si justement qu'il n'y ait eu rien à désirer ny à adjoûter : la seconde, qu'on a en peu de temps instruit & fait des Maistres experts pour joüer & manier ces instrumens, en sorte qu'ils eussent rendu la chose si facile qu'on l'eust fait passer sans peine à la posterité.

Ce qu'on voit n'estre pas possible, & ce qu'on sçait n'estre point arrivé en quelque Art ou invention que ce soit mesme les moins difficiles, puisque toutes les choses inventées il y a long-temps ne sont point encore parfaites, & qu'elles ont besoin de l'industrie des hommes pour recevoir leur derniere perfection, où peut-estre elles n'arriveront jamais ; du moins n'y aura-t'il point d'homme si hardy que d'oser assurer qu'on ne puisse plus rien ajoûter à leur perfection.

Les Arts donc, & les inventions des hommes, ressemblent aux ouvrages de la Nature, qui ont de foibles commencemens, qui croissent, se fortifient, & à la fin viennent à un état de consistence où ils demeurent longtemps, & où ils peuvent encore recevoir quelque embelissement, & d'où quelquefois aussi ils déchoient. Cette décadence des Arts arrive ordinairement par la misere des temps, lorsque les Princes ou Etats les negligent & ne contribuent pas à leur soutien : ce qui fait qu'on les méprise & qu'enfin peu à peu on les abandonne ; sur tout quand ils ne sont pas necessaires à la vie, comme ne le sont pas la plusspart des sciences & productions de l'esprit. Il ne faut donc pas croire que l'Algebre ait esté inventée tout d'un coup & par un seul homme ; pour en pouvoir montrer l'origine, non plus que de tous les autres Arts qui sont plus connus & plus d'usage qu'elle. Et quand il seroit vray qu'un seul homme, par exemple Diophante, l'auroit inventée, ce qu'il ne dit pas, il seroit arrivé ce qui en effet est arrivé à Diophante, que son art auroit esté inconnu à ceux de son temps, que son Livre n'auroit esté entendu que de peu de personnes, & que si les Arabes l'ayant découvert avoient appris son art, ils ne l'auroient enseigné & fait connoistre aux autres que par succession de temps, qui en auroit fait evanoüir la memoire : que les premiers qui l'auroient appris ou sous des maîtres, ou par leurs meditations, n'auroient peut estre pas oüy parler de son nom ; comme en effet tous ceux qui au siecle passé ont fait des Livres d'Algebre dans l'Europe, n'ont point connu Diophante, qui n'a commencé à sortir des Bibliotheques pour voir le jour qu'à la fin du siecle precedent. Ainsi quoy qu'il paroisse par ce Livre que l'Algebre est un art ancien, neanmoins il est évident que les Grecs & Latins comme Jamblichus & Boëce, qu'on

croit avoir esté apres luy, n'ont eu aucune connoissance de son Livre, ny de la maniere d'operer qui y est enseignée. Et de là on pourroit croire que puisque ces grands Arithmeticiens avoient la clef des nombres sans Algebre, parce qu'ils en penetroient le fonds, ils auroient pû mesme negliger cet Art, qui n'auroit commencé à estre cultivé que lorsqu'on a perdu les connoissances qu'ils avoient de la puissance des nombres.

Des Causes de l'obscurité & difficultez de l'Algebre, & des Remedes pour la rendre intelligible & facile.

NOus reduisons à quatre les principales Causes de l'obscurité & difficultez de l'Algebre. La premiere est l'imperfection des caracteres: La seconde, l'équivoque ou confusion des termes de l'Art: La troisiéme, le défaut de methode: La quatriéme, la quantité des preceptes sans aucun soulagement de memoire. A ces quatres défauts, nous avons appliqué des Remedes convenables.

Premiere Cause de l'obscurité & difficultez de l'Algebre.

COmme la pluspart de ceux à qui nous parlons icy, ne sçavent pas encore en quoy consiste l'Algebre, il est necessaire de dire en peu de mots, que les operations de l'Arithmetique ordinaire & de l'Algebre different, en ce que dans celles-là on travaille sur des nombres connus qui en produisent d'autres qui ne l'estoient pas; mais en celle-cy on propose toûjours quelque nombre inconnu qu'il faut découvrir par les conditions de la question. Or on considere icy les nombres inconnus par rapport à quelque rang de la progression Geometrique, dont le premier caractere est l'unité, qui est tout en puissance, & qui n'est rien en effet: le second qui est la premiere puissance, s'appelle Racine: le troisiéme qui est la seconde, s'appelle Quarré: le quatriéme qui est la troisiéme puissance, s'appelle Cube, & les autres ainsi de suite comme nous les avons representez dans les Livres precedens. Ces rangs de progression Geometrique reçoivent leur valeur ou prix du second caractere, que nous avons nommé Racine, & chacune de ces puissances est produite par la multiplication de cette Racine, autant de fois qu'il est éloigné du premier caractere. Par exemple, la Racine qui est la premiere puissance, n'estant éloignée du premier carectere que d'une unité, elle demeure telle qu'elle est en se multipliant par l'unité: les quarrez estant éloignez de deux unitez du premier, ils sont produits par la racine multipliée par elle, ou posée deux fois, comme 2 fois 2 font 4 qui est un quarré; 3 fois 3 font 9 qui est un quarré, &c. comme qui mettroit deux fois la racine pour se multiplier l'une par l'antre 2, 2; 3, 3, &c. les Cubes estant éloignez de trois unitez du premier, multiplient trois fois leur racine, comme si on la mettoit trois fois de suite, ainsi 2, 2, 2; ou 3, 3, 3, & qu'ils

s'entre multipliassent l'un l'autre, il viendroit 8, Cube de la racine 2, & 27, Cube de la racine 3, &c. Pour mieux entendre cet ordre de multiplication, on a eu recours aux nombres de la progression naturelle qu'on a disposez sur la progression Geometrique, en sorte que 1, répond à la racine, 2 au quarré, 3 au cube, &c. Et pour ce sujet on a appellé les nombres de la progression Naturelle, les Exposans de la progression Geometrique, c'est à dire ceux qui marquoient combien chaque puissance avoit multiplié sa racine pour estre produite. Et comme dans l'Algebre on employe ces puissances, soit qu'elles soient proposées dans la question, ou soit qu'elles s'y produisent par les operations, on a eu besoin de caracteres pour les marquer, & l'on a dû chercher les moyens de marquer aussi ces Exposans pour faciliter les operations de l'Algebre. On a jusqu'icy employé deux sortes de caracteres. Les uns ont pris les premieres lettres des mots de chaque puissance, en marquant l'unité par un zero, ou par une N, pour signifier qu'elle est le principe des nombres, ou qu'elle n'est rien en effet mais tout en puissance; & pour les puissances ils ont mis, R, Q, C, &c. c'est à dire, Racine, Quarré, Cube, &c. Diophante se sert de l'N pour signifier Racine, parce qu'en effet la Racine est un nombre pur & qui n'a receu en soy aucun changement. D'autres croyant avoir mieux rencontré ont negligé cette dénomination des puissances, & la marque de leur rang, ou du rapport à leurs Exposans, & ont consideré les nombres proposez en deux manieres, ou comme connus ou comme inconnus: ils expriment les premiers par les premieres lettres de l'alphabet, & les autres par les dernieres lettres de l'alphabet, sauf à leur ajoûter des nombres à côté qui désignent les puissances, quand il s'en rencontrera dans les questions: & ceux-cy ont nommé leur Algebre la Specieuse par excellence. Mais ny les uns ny les autres n'aident point l'imagination, & ne forment aucune idée du rapport des puissances avec leurs Exposans, & qui pis est ne facilitent en aucune maniere les operations de l'Algebre, & les derniers encore moins que les premiers, qui du moins désignent le nom des puissances.

Remede.

Les Caracteres que nous avons choisi pour nostre Algebre font deux effets considerables: ils aident l'imagination en luy representant les Exposans des puissances, c'est à sçavoir la quantité de fois qu'une Racine s'est multipliée pour produire telle ou telle puissance, & ils facilitent les operations.

Ces Caracteres sont	Racines.	Quarrez.	Cubes.	Quarrez de quarrez.	&c.
	j	ij	iij	jv.	

Ce premier caractere j, qui s'appelle Racine, signifie qu'elle n'est posée qu'une fois: le second, ij, qui s'appelle Quarré, montre que la Racine est

poſée deux fois : le troiſiéme, iij, qui s'appelle Cube ; qu'elle s'eſt multipliée trois fois, &c. Ainſi ces marques repreſentent à l'imagination l'origine de leur production & leur rang de puiſſances ; c'eſt à dire que ſans avoir recours aux Expoſans, comme dans les autres methodes, on les a devant les yeux.

Mais la facilité que ces marques ou caracteres donnent dans les operations eſt incomparable. Par exemple, ſi dans l'Algebre on multiplie une Racine par une Racine, ou quelqu'autre puiſſance que ce ſoit par une autre, la Regle dit qu'il faut adjoûter enſemble les puiſſances qui ſe multiplient, pour en faire une plus grande puiſſance compoſée des deux. Ainſi ſi l'on multiplie j par j, il eſt facile de les ajoûter enſemble, & de voir qu'il en viendra ij, qui eſt un quarré. Et de meſme ſi l'on multiplie ij par j, il viendra iij, qui eſt un Cube, &c. Au lieu que dans la premiere methode il faut avoir recours aux Expoſans, pour voir quels ſont les caracteres de la progreſſion Geometrique qui leur répondent, & ainſi pour faire les operations il faut avoir devant les yeux les deux progreſſions Arithmetique & Geometrique, pour compoſer des caracteres dénotez par l'une & l'autre progreſſion. Et dans la ſeconde methode qu'ils qualifient de Specieuſe, ſi l'on multiplie un *a* par un *a*, il vient diſent-ils un a^2, c'eſt à dire un *a* qui eſt une ſeconde puiſſance, qu'on appelle un quarré. Et ſi vous multipliez un *a* par un a^2, il vient un a^3, c'eſt à dire une troiſiéme puiſſance qui eſt un Cube. On voit premierement l'inutilité & la multiplicité de ces caracteres mêlez de lettres Romaines & chifres Arabes : & en ſecond lieu on n'apperçoit pas comment un *a* multiplié par un a^2 peut faire un a^3. Nous remedierons dans noſtre Algebre à la neceſſité de diſtinguer les caracteres des meſmes puiſſances quand il en ſera beſoin.

Secondes Cauſes d'obſcurité.

L'Abus ou la confuſion des meſmes noms pour ſignifier differentes choſes, eſt la ſeconde ſource d'obſcurité dans les autres methodes.

Ils ont donné le nom de Signes aux caracteres de l'Algebre, qui ſervent pour marquer les puiſſances : ils ont donné le meſme nom aux Signes qu'ils appellent de Plus & de Moins, & à ce qu'ils appellent les Secondes Racines, & encore aux nombres Sourds ; tellement que quand on lit dans les Auteurs, ſur tout de la premiere methode le nom de Signe, on ne ſçait à quoy l'appliquer. La diverſité encore des caracteres parmy les differens Auteurs, a eſté une autre cauſe de confuſion.

Remede.

NOus avons donné à chaque chose differente un nom different. Ainsi aux Signes Cossiques ou Caracteres de l'Algebre qui representent les puissances des nombres, nous avons donné le nom de Formes : Aux Signes de Plus & de Moins, le nom de Signes ; aux Racines secondes, le nom de Notes. Nous avons aussi ôté la diversité & la confusion des caracteres, & donné le sien propre à chaque chose differente.

Troisiéme & quatriéme Cause d'obscurité.

LE défaut de methode est le plus grand de tous les défauts dans les Arts & dans les Sciences : & nous n'avons garde d'en accuser tous les Maîtres de cét Art. Ce qu'il y a de vray est que depuis qu'on a quitté l'ancienne methode, & embrassé la derniere pour faire les operations de l'Algebre sur des lettres, on a laissé la Regle d'Algebre qui renferme en peu de mots une infinité de preceptes, ou si on l'a mise, on la cachée & envelopée sous des voiles qui la rendent si obscure qu'on ne la connoist point. Et il a fallu à son défaut entasser une infinité de regles & de preceptes les uns sur les autres sans ordre, & selon que les occasions s'en presentoient dans les questions. Ce qui a fait deux obscuritez & difficultez remarquables, l'une par le défaut de methode & l'autre par la multitude des preceptes donnez & rapportez hors de leur place & sans ordre.

Remede.

NOus avons rétably l'ancienne ou premiere methode qui d'abord enseigne les operations de l'Arithmetique ordinaire, par les caracteres & selon les operations de l'Algebre, & ensuite la Regle d'Algebre expliquée par des Exemples. Cette Regle est si generale qu'elle peut suffire à la resolution de toutes les questions de quelque nature qu'elles soient. Elle est expliquée si clairement, & par des preceptes si bien mis dans leur ordre, que nous ne craignons point de dire que l'Algebre y est renduë aussi aisée que l'Arithmetique ordinaire, pour ne pas dire plus. Et nous ajoûterons icy nostre Paradoxe, que le moyen le plus seur & le plus commode pour la rendre claire & facile, a esté de l'avoir mise en Vers Latins. Car outre le soulagement de memoire, & le délassement d'esprit qu'apporte la Poësie, il n'y a pas eu de meilleur moyen d'ôter la confusion des preceptes, & de les representer à l'esprit & à la veuë, que par cette voye. Pour ceux qui n'entendent pas le Latin nous avons mis une Explication abregée de l'Algebre en François, d'une maniere qui suffira pour en donner une entiere & parfaite intelligence.

Ordre des trois Livres ſuivans.

LE Premier Livre qui eſt le Huitiéme de cet Ouvrage, donne les operations de l'Arithmetique par les caracteres de l'Algebre.

Le Second qui eſt le Neuviéme, enſeigne & explique la Regle d'Algebre, avec ſes dépendances.

Le Troiſiéme qui eſt le Dixiéme & dernier de cet Ouvrage, comprend trois parties en François; La premiere eſt l'Algebre renfermée en l'explication de la ſeule Regle d'Algebre : La ſeconde eſt une Nouvelle Analyſe des Nombres, qui contient pluſieurs Maximes generales qui peuvent eſtre regardées comme le ſuplément ou complément de l'Algebre, dans laquelle on ne peut gueres operer ſans les ſçavoir. Enfin nous fermons ce Traité par des Queſtions ſur beaucoup de ſortes de matieres, reſoluées par l'Algebre, par l'Arihtmetique ordinaire, & la pluſpart par le ſeul raiſonnement. Ce qui prouvera depuis le commencement juſqu'à la fin, l'Excellence de l'Arithmetique, & ſon utilité pour aider à former le jugement, & donner une grande penetration d'eſprit.





LIBER OCTAVUS.

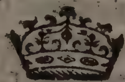
ARITHMETICA SPECIOSA SEU ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

Quid sit Algebra.



IN Numeris quidquid latet, hoc Algebra revelat:
uidquid in Algebra latet, hoc exponere mens est.
Hanc dixêre Arabes Algebram, nos Speciosam,
Ob præclara sinu quæ vasto arcana recondit.
Occulti numeri dicta est hinc Algebra Clavis.
Illa suis signis gaudet propriisque figuris;
Cossica signa vocant Itali, quibus Algebra Cossa est,
Nos Algebraicas Formas: at Signa vocamus
Quæ numeros minuunt aut addunt, de quibus infrà.
Commixtim Numeros jungendo Signaque Formis,
Utitur his Algebra loco numeri inveniendi,
Mirandâ methodo, quæ Algebræ Regula dicta est.
Hanc luci dabimus post quædam prævia ad illam.



CAPUT II.

De Notis seu Figuris Algebraicis quas Formas vocamus.

PEr Geometricas rationes Algebra tantùm
Progreditur, quarum ex uno procedit origo;
Multiplicesque illas omnes sic esse necesse est.
Hæc numerorum Algebraicorum nomina sunto.
Zero notat primum, Numerusque vocatur; & alter
Dicetur Radix; Quadratum tertius; inde
Quartus erit Cubus; & quintus, Quadratoquadratus;
Sextus erit Surdesolidus; reliquique priorum
Nomina subsumunt, horum duplicantque valorem
Aut triplicant, similique aliâ ratione reponunt;
Multiplicatque prior primâ radice, sequentem:
Sic Geometrica in longum Progressio abibit.
Formas usurpant alij, variasque figuras;
Nos apponemus numeros, ratione locorum,
Apté exponentes quot Radix multiplicetur.
Romanoque charactere hos signabimus omnes,
Excepto primo quem nulla figura notabit;
Ille etenim signat numeros, Numerusque vocatur.
Unum, Radicem; duo signabuntque Quadratum;
Inde Cubum, tria; tum quatuor, Quadratoquadratum;
Sursolidum dein quinque; hinc sex, Quadratocubumque;
Septem, Sursolidum alterum; & octo, Quadratoquadrato-
Quadratum; duplicatque novem Cubum; & ad Numeros, sic
Compositos, Exponentes primi repetuntur;
Ad non compositos Surdesolidi repetuntur.
Sunt duplicis generis Formæ, Compostaque, Simplex:
Et duplices Numeri, Composti, Incompositique.
Hæc Forma est Simplex, unum quæ nomen habebit;
Et Numerus Simplex, quem solùm dividit unum.
Compositæ Formæ, duo, pluraque nomina habebunt:
Compositi numeri, quos dividit alter ab uno.
Tres primæ Formæ, primi generis; reliquæque
Impare post quartam numero, à quinque incipientes,

Ac deinceps numerûm quas primorum ordo tenebit.
Dicuntur Surdeſolidi, primuſque, ſecundus,
Tertius & quartus, quintuſque, ac ordine deinceps
Quique ſuo numeri, quos ſolùm dividit unum.
Omnes Formæ aliæ ac numeri alterius generis ſunt.
Hæc melius quàm verba, in margine pagina monſtrat.

Nomina.	Numerus.	R.	q.	c.	qq.	1^{9}s.	qc.	2^{9}s.	qqq.	cc.	&c.
Formæ.	o.	j.	ij.	iij.	jv.	v.	vj.	vij.	viij.	jx.	&c.
Progreſſio Geom. dupla.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	&c.

Formæ Compoſitæ ſub numeris Compoſitis.

Num.	4.	6.	8.	9.	10.	12.	14.	15.	16.	18.	20.	21.	22.	24.	&c.
Nom.	qq.	qc.	qqq.	cc.	qs.	qqc.	q.	cs.	qqqq.	qcc.	qqs.	cs.	qs.	qqqc.	&c.
For,	jv.	vj.	viij.	jx.	x.	xij.	xjv.	xv.	xvj.	xviij.	xx.	xxj.	xxij.	xxjv.	&c.

Formæ Simplices ſub numeris primis ſeu Incompoſitis.

Num.	1.	2.	3.	5.	7.	11.	13.	17.	19.	23.	29.	31.	37	&c.
Nom.	R.	q.	c.	1^{9}s.	2^{9}s.	3^{9}s.	4^{9}s.	5^{9}s.	6^{9}s.	7^{9}s.	8^{9}s.	9^{9}s.	10^{9}s.	&c.
For.	j.	ij.	iij.	v.	vij.	xj.	xiij.	xvij.	xix.	xxiij.	xxix.	xxxj.	xxxij.	&c.

CAPUT III.

De Numeratione Algebraica; ac de Signis Pluris & Minoris: de notis Reductionis & Æquationis; tum de numeris Surdis.

CUm diverſorum generum Numeratio ſemper
Exiſtat Geometricos Algebraicoſque
Inter proceſſus; diverſa locatio eorum
Semper erit, juxta uniuſcujuſque valorem.
Non alios igitur, quàm quos Geometricorum
Proceſſus facit, Algebræ Numeratio novit,
Diſponens Numeros, Radices, deinde Quadratos,
Atque Cubos, reliquoſque ex ordine quoſuis.
Cùm numeras ergo, varias diſpone figuras
Ordine quaſque ſuo, majores deinde minores.
Si plures numeras, ut in additione, figuras:

Fac ut quisque suo simili respondeat ordo:
Præpones Formis numeros ut pagina monstrat.

12. 4j. 3ij. 6iij. 8jv. &c.
Sic Numera, 12. quatuor Rad. tres quad. sex cub. octo quadratoquad. &c.

Si plures. sic subjciendi. Ut 4. 2j. 1ij. 9iij. 10jv. &c.
3. 3j. 2ij. 7iij. 5jv. &c.

De Signis Pluris & Minoris.

Signa duo sunt præterea quæ Plusve, Minusve
Signant: Crux signum Pluris, signumque Minoris
Linea parua facit; vel littera prima duorum.

† Signum Pluris, vel P. | — Signum Minoris, vel M.

Hæc Numero aut Formæ præpones Signa sequenti.
Primum Signum addit Formam, minuitque Secundum.
Cùm numerus Formæ præponitur, ille sequentem
Hanc numerat, toties ponens quot in ipso erit unum:
Cum verò numerus sine Forma apponitur, ille
Simpliciter proprium numerat servatque valorem;
Præcedens nî forte Minus Signum, ipse sequatur:
Nam Signum, ipsius minuit tollitque valorem.

Signum Pluris 12. † 4j. † 2ij. | 1j. † 4.
Sic enuntia: 12, plus quatuor Rad. plus 2 quadr. Una Radix, plus quatuor.

Signum Minoris 9 — 2j. — 1ij. &c. | 2j — 6
Sic enuntia: 9 minus 2 radic. minus 1. quadr. &c. duæ rad. minus sex.

Signum P. & M. 20j. † 2ij. — 8.
20 rad. plus 2 quad. minus 8.

De Notis Reductionis & Æquationis.

Nominis à prima capietque Reductio signum:
Oppositas aut Æquales signabit O majus.

Nota Reductionis, R: Nota Oppositionis aut Æquationis, O; aliquando, &. |

De Numeris Surdis.

Sunt alij Numeri, rationem quos nec habere,
Esse nec idcircò numeros dixêre; datumque

Ipsis Surdorum nomen : præponitur illis,
Post Surdi signum, Forma una Algebraicarum,
Quâ petitur, præstare quod unquam nemo valebit.
Hi sua habent præcepta tamen, tractanda seorsum :
Cùm nihil ad numeros, aliis tractanda remitto :
Quod Geometrarum est, Geometria tractet.

Ut √ij 20. id est Radix quadrata 20, quæ nulla dari potest. Sic √iij 18. Radix Cubica 18 quæ nulla est; ideo hi numeri Surdi dicuntur seu Irrationales, quorum nota est √ : qui nihil ad Arithmeticam pertinent, sed solùm ad Geometriam.

CAPUT IV.

De Additione Algebraica.

QUando tibi Additio facienda est : ista notato.
Cùm Numero aut Formæ, Signum haud apponitur ullum,
Et Numeri & Formæ servant quæcumque valorem.

Ut 8, 2j. 3 ij, 5 iij. id est 8, 2 Rad. 3 quad. 5 cubi.

Servant quæque suum valorem quia nullum signum apponitur, quasi appositum esset signum Pluris.

Varij Casus Additionis.

Formæ Algebraicæ aut sunt diversæ speciei;
Aut sunt ejusdem, nec Signum, Plusve Minusve
Tunc interseritur : vel, diversis speciebus
Signa interposita, aut eadem, aut pugnantia secum.
Ad Casus quosque hæc tibi sunt mandata tenenda.

Primus Casus.

Cùm variæ Formæ : Formis Numerisque retentis,
Additio ut fiat, Signum interponito Pluris.

Ut si addas 4 ij ad 5 iij, fient 4 ij † 5 iij.

Secundus Casus.

Si sit Forma eadem; Numeros junge, adijce Formam.

Ut si addas 3 ij ad 5 ij, fient 8 ij.

Tertius Casus.

Si variæ ſpecies, eadem commixtaque Signa;
Subijcito ſpecies ſpeciebus, Signaque Signis:
Junge ſimul Numeros, Signis Formiſque retentis.

	Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*
Ut ſi addas	6 ij † 8 j	7 ij † 8 j --- 5	7 iij † 9 --- 3 ij
	7 ij † 10 j	3 ij † 9 j --- 8	4 iij † 10 --- 5 ij
fiet Summa	13 ij † 18 j	10 ij † 17 j --- 13	11. iij † 19 --- 8 ij

Ex. IV.

4 iij † 11 ij † 1. j --- 6
3 iij † 1. ij † 8 j --- 4
7 iij † 12 ij † 9 j --- 10.

Quartus Casus.

Signaque cùm varia occurunt Subtractio fiat;
Scilicet ex numero retrahas majore minorem;
Majoris numeri Signum præponito Formæ.

	Ex. I.	*Ex. II.*
Ut ſi addas	6 ij † 8 j	7. vj † 0. v. † 8. jv. † 0. iij — 4. j † 8.
cum	2 ij — 10 j	7. vj † 5. v. — 11 jv — 11. iij — 0. j † 0.
fiet ſumma	8 ij — 2 j	14 vj † 5 v — 3 jv — 11. iij — 4 j. † 8.

Quintus Casus.

Cum zero ſuſdeque, nihil ſuſdeque notetur

6 ij † 0 j † 5
3 ij † 0 j † 2
9 ij † 0. † 7.



CAPITIS IV. RESOLUTIO.

De Additione Algebraica resoluta ad numeros Arithmeticos.

Formarum sic quatumvis Resolutio fiet. Dupli processûs Exemplum sumimus, ad quod Quemvis processum facili ratione reduces.

Alg. 8, 2 j. 3 ij. 5 iij.
id est. 8. 4. 12. 40. Summa 64.

Primi Casus.

Alg. 4 ij ad 5 iij faciunt 4 ij † 5 iij.
id est. 16 ad 40 faciunt 56.

Secundi Casus.

3 ij ad 5 ij faciunt 8 ij.
12 ad 20 faciunt 32.

Tertij Casus.

Vide add. suprà.

Summa	13 ij † 18 j	10 ij † 17 j-13	11. iij † 19-8ij	7 iij † 12ij † 9 j-10
id est	52 & 36	40 & 21.	88 & 19-32	56 & 48 & 8
Summa	88	61	75	112

Quarti Casus.

Summa 8 ij — 2 j. | 14 vj † 5 v — 3 jv — 11. iij — 4 j. — 8.
id est. 28 | 8 9 6 & 160, a quo tollenda 48 & 88, & 8. addenda 8.
| Summa additionis & subtractionis 920.

Quinti Casus.

Summa 9 ij † $\overset{0}{0}$ † $\overset{9}{7}$
id est 43.

CAPUT V.

De Subtractione Algebraica.

ADmittit præcedentes Subtractio Casus.

Primus Casus.

Cum variæ Formæ; Signum interpone Minoris;
Majorem Formam Formæ præpone minori.
Ut si tollas 4 ij à 5 iij, remanent 5 iij --- 4 ij.

Secundus Casus.

Si verò sit Forma eadem, Subtractio fiet,
Majore ex numero numerum retrahendo minorem,
Communi Formâ remanente, ut in Additione.
Ut si tollas 3 ij à 5 ij, remanent 2 ij.

Tertius Casus.

Si variæ species, eadem commixtaque Signa,
Subijcito species speciebus, Signaque Signis;
Subtrahito numeros, Formas & Signa relinque.

si à	7. iij † 11. ij † 8. j --- 10.	11. iij † 19 --- 8 ħ
tollas	3. iij † 0. ij † 8. j --- 4.	4. iij † 11 --- 5 ij
remanent	4. iij † 11. ij † 0. j --- 6.	7. iij † 8 --- 3 ij

| 11. v. † 9. jv. † 14. j --- 14 † 4
| 7. v. † 0. jv. † 9. j --- 5 † 4
| 4. v. † 9. jv † 5. j --- 9 † 0

Quartus Casus.

Signaque cum varia occurrunt; numeros simul adde,
Et Signum numeri Subtracto appone supremi.

14 vj † 5. v --- 3 jv --- 11. iij --- 4 j † 8
7 vj † 0. v † 8 jv † 0 iij --- 4 j † 8
7. vj † 5. v. --- 11. jv --- 11. iij --- 0. j † 0.

Quintus Casus.

Quintus Casus.

Si Subducendus superat; mutando, minorem
Subtrahito de majori, mutatoque Signum.

Ex. I.	*Ex. II.*
6. ij † 8. j.	9. ij † 4. j — 5
2 ij † 10 j.	4 ij † 7. j — 8
4. ij — 2. j	5 ij — 3 j. † 3

CAPITIS V. RESOLUTIO.

De Subtractione Algebraica, per Arithmeticam.

Primi Casus.

Si tollas 4 ij à 5 iij, remanent 5 iij — 4 ij
id est 16 à 40 remanent 24.

Secundi Casus.

Si tollas 3 ij à 5 ij, remanent 2 ij
id est 12 à 20 remanent 8.

Tertij Casus.

Si à	7 iij † 11. ij † 8 j — 10	11. iij † 19 - 8 ij	11. v. † 9 jv † 14 j - 14 † 4.
tollas	3 iij † 0 ij † 8 j — 4	4 iij † 11 - 5 ij	7 v † 0 jv † 9 j - 5 † 4.
remanent	4 iij † 11. ij † 0 j — 6	7 iij † 8 - 3 ij	4. v † 9 jv † 5 j - 9 † 0.
id est si à	106	si à 75	si à 514
tollas	36	tollas 23	tollas 241
remanent	70.	remanent 52	remanent 273

Quarti Casus.

Si à 920
tollas 576

remanent 344

Quinti Casus.

Ex. I.		*Ex. II.*
Si à	40	39
tollas	28	32
remanent	12	7

CAPUT VI.

De Multiplicatione Algebraica.

Primus Casus.

PEr numerum numerus Formæ ſi multiplicetur;
Accreſcet ſolus numerus, Formâ remanente
Ut 3 in 4 j. fiunt 12 j. | 3 in 8 iij fiunt 24 iij.

Secundus Casus.

At numeros, Formaſque inter ſe multiplicando;
Multiplica numeros inter ſe, ac addito Formas.
Ut 5 j in 4 ij fient 20 iij | ſic 3 ij in 8 iij fiunt 24 v.

Tertius Casus.

Plures, per numerum cum multiplicaveris unum;
Facto, Signum appone quod eſt in multiplicandis.

Ex. I.	*Ex. II.*
Ut 7 ij — 4 j	7 ij † 4. j.
ſi per 9	per 9
fit 63. ij — 36. j	fit 63. ij. † 36. j.

Quartus Casus.

Diverſa aut eadem cùm Signa utrobique notata;
Signa eadem, Pluri; diverſa, Minore notentur.

Ex. I.

Ut, signa eadem P. 8. ij † 9
per. 8. ij † 9

multiplicatio per 9 | 72. ij. † 81
per 8 ij | 64. jv. † 72 ij

Summa 64. jv. † 144 ij † 81.

Ex. II.

Signa 8 ij — 9
diversa 8 ij — 9

per 9 | -72 ij † 81
per 8 ij | 64. jv — 72 ij

S. 64. jv - 144 ij † 81.

Ex. III.

Signa eadem & diversa. | 6 ij † 8 j — 6
2 ij — 4

per 4 | — 24 ij — 32 j. † 24.
per 2 ij 12 jv † 16 iij — 12 ij

12 jv. † 16 iij — 36 ij — 32 j. † 24.

CAPITIS VI. RESOLUTIO.

De Multiplicatione Algebraica, per Arithmeticam.

Primi Casus.

Ex. I.

Ex 3 in 4 j fient 12 j.
id est ex 3 in 8 fit 24.

Ex. II.

Ex 3 in 8 iij fiunt 24 iij
ex 3 in 64 fit 192.

Secundi Casus.

Ex I.

Ex 5 j. in 4 ij fiunt 20 iij
id est ex 10 in 16 fit 160.

Ex. II.

Ex 3 ij in 8 iij fiunt 24 v.
ex 12 in 64 fit 768.



Tertij Casus.

Ex. I.	*Ex. II.*
7 ij — 4 j.	7 ij † 4 j
per 9	per 9
fit 63 ij — 36 j	fit 63 ij † 36 j
id est 20	id est 36
per 9	per 9
fit 180	fit 324

Quarti Casus.

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III:*
8 ij † 9	8 ij — 9	6 ij † 8 j — 6
per 8 ij † 9	8 ij — 9	per 2 ij — 4
Sum 64 jv † 144 ij † 81	64. jv. — 144 ij † 81.	12 jv. † 16 iij. 36 ij 32 j
id est 41	id est 23	id est 34
per 41	per 23	per 4
fit 1681	fit 329	fit 136

CAPUT VII.

De Divisione Algebraica.

Primus Casus.

PEr Numerum, numeri Formæ Divisio cùm fit,
Solus dividitur Numerus Formâ remanente.

Ex. I.	*Ex. II.*
Ut, 12 j. per 3 (4. j.	24 iij per 8 (3 iij.

Secundus Casus.

Per Numeros Formasque simul Divisio cum fit,
Dividito numeros numeris, ac Subtrahe Formas.

Ex. I.		*Ex. II.*		*Ex. III.*		*Ex. IV.*	
Ut 20 iij per 4 ij	(5 j	24 v per 8 iij	(3 ij	36 vj per 4 jv	(9 ij	18 jv per 3 iij	(6 j.

Tertius Casus.

Dividuos plures, numero cum dividis uno;
Semper dividui in quotiente apponito Signum.

Ex. I.		*Ex. II.*	
Ut 63 ij -- 36 j per 9	(7 ij -- 4 j	63 ij † 36 j. per 9	(7 ij † 4 j.

Compositas Algebra ignorat Partitiones:
Nam varias Formas, aut Signa utrobique, reducit,
Arte hac quam tradenda brevi tibi Regula monstrat.

CAPITIS VII. RESOLUTIO.

De Divisione Algebraica, per Arithmeticam.

Primi Casus.

Ex. I.				*Ex. II.*			
12 j. per 3	(4 j. id est	24 per 3	(8	24 iij per 8	(3 iij	id est 192 per 8	(24

Secundi Casus.

Ex. I.		*Ex. II.*		*Ex. III.*		*Ex. IV.*	
160 per 16	(10	768 per 64	(12	2304 per 64	(36	288 24	(12

Tertij Casus.

Ex. I.		*Ex. II.*	
180 per 9	(20	324 per 9	(36.

CAPUT VIII.

De Probatione quatuor prædictarum Operationum Algebraicarum.

PRæter quod Subtractio ab Additione probatur,
Atque vicissim; & Multiplicatio Partitione:
Sic aliter, Numeros, Formas & Signa resoluens,
Ad certum Examen poteris jam facta vocare.
Sic numeri & Formæ poterunt quæcumque resolui:
A dupla Radice venit Progressio dupla;
A tripla Radice venit Progressio tripla;
Et sic de Radice venit Progressio quævis:
Propositos ergo numeros Formasque resolve
Per sumptum à propriâ primâ Radice valorem;
Radix dupla valet duo; tripla valet tria; sicque
Progrediens Radix proprium fert quæque valorem:
Radices, Quadrata; Cubique Quadrata secuntur;
Quæque figura suum capit à Radice valorem:
Si Radix, duo; Quadratum, quatuor; Cubus, octo;
Et reliquæ proprium duplant quæcumque valorem.
Si Radix, tria; Quadratum ergo novem inde valebit.
Ad numeros igitur Formas quascumque resolve,
Et toties pone in numeris, quoties tibi monstrant
Appositi numeri, nisi quòd Signum Minus aufert
De summa numeros ipsum Formasque sequentes;
Addit enim Pluris Signum, ac numeri sine Signo.
Ex Formis sic ad numeros per Signa redactis,
Immò ex sic factis numeris, certum tibi fiet
An bene vel malè sit prius actum; Nam numeri idem
Semper provenient in facto, propositoque.
Exempli causâ: Numeri Addendi, resoluti
Idem provenient ac in Summa resoluta:
Sic etiam numeri Subducendi resoluti,
Idem provenient juncti Reliquo resoluto,
Cum numero resoluto à quo Subtractio facta est.
Sic de Divisis, & sic de Multiplicatis.

Ex. I. In Additione.

Ex additis, 6 iij † 4 ij 4 iij — 8 ij fit summa, 10 iij — 4 ij	Sic resolues in dupla progreſſ. 6 iij valent 48. † 4 ij valent 16. 48 & 16, faciunt 64. tum 4 iij valent 32, ſed — 8 ij quæ valent 32 delent 32, ergo in addendis eſt 64.

Nunc videndum ſi ſumma valet 64. 10 iij in eadem progreſſione dupla, faciunt 80, ex quibus ſi tollas — 4 ij id eſt 16, ſupereſt 64. Ergo bené ſtat operatio.

Ex. II. In Subtractione.

Ex ſubtractis, 10 iij — 4 ij 6 iij † 4 ij fit reliquum 4 iij — 8 ij	Sic reſolues in tripla progreſſione 10 iij valent 270, à quibus ſi ſubtrahas — 4 ij id eſt 36, remanent 234. Tum ſi ſubtractum 6 iij, id eſt 162, & † 4 ij, id eſt, 36, & 4 iij — 8 ij id eſt 36 ſimul addas, efficies item 234: bené ergo.

Ex. III. In Multiplicatione.

Ex multipl. 6 j — 8 per 5 j — 3 — 18 j † 24 30 ij — 40 j S. 30 ij — 58 j † 24	Sic reſolues in progr. dupla. 6 j. id eſt 12, — 8, faciunt 4, & 5 j. id eſt 10, — 3, faciunt 7. Ex multiplicatione 4 in 7 fit 28. Atqui ex 30 ij id eſt 120, — 58 j id eſt 116 ſive 4, & 24, fit etiam 28. Ergo bené.

Ex. IV. In Diviſione.

Ex divíſ. 30 ij — 58 j † 24 per 6 j — 8 fit quotiens (5 j — 3	In dupla progr. valent 28 & fit quotiẽs (7 valet 4 valet item (7 ergo bené.



CAPUT IX.

DE FRACTIS ALGEBRAICIS.

Reductio maximorum Numerorum ad minimos numeros; & Formarum ad alias minores.

AD minimos numeros parili ratione reduces
Ac in Fractorum praxi; nisi quod duo, vel tres
Sæpé reducendi, quod ope communis ad omnes
Mensuræ facies: Formas retrahendo reduces.

Reductio Numerorum tantùm.

sic $\frac{15}{5\,j}$ reducentur ad $\frac{3}{1.\,j}$

Reductio Formarum tantùm.

sic $\frac{4\,ij}{1.\,jv}$ reducentur ad $\frac{4}{1.\,ij.}$

Reductio numerorum & Formarum.

$\frac{18\,ij --- 9\,j}{6\,j + 3\,ij}$ reducentur ad $\frac{6.\,j -- 3}{2 + 1.\,j}$

Reductio ad eamdem denominationem.

IN Cruce transversos hinc illinc multiplicato;
Duc in se Nomenclatores; addito Formas.

Sic $\frac{3.\,j}{4.\,ij}$ X $\frac{4\,iij.}{5\,vj.}$ fiunt $\frac{15\,vij.}{20}$ $\frac{16\,v.}{viij.}$

Reductio Integri & Fracti ad eamdem Denominationem.

UNum suppone Integro; inde reducito ut anté.

Ut si reducenda sint. | $6\,\frac{4\,j}{7\,ij}$ sic reduces $\frac{6}{1}$ X $\frac{4\,j}{7\,ij}$

$\frac{42\,ij.\;\; 4.\,j}{7\,ij.}$

Item

Item 5 ij $\frac{4\,iij}{3\,ij}$ sic reduces $\frac{5\,ij}{1} \mathrm{X} \frac{4\,iij}{3\,ij}$

$$\frac{15\,jv. \quad 4\,iij}{3\,ij.}$$

Reductio Integri cum fracto, ac fracti alius ad eamdem denominationem.

Fractum ad idem, Integrum Fractumque reducito; tandem
Utraque Fracta reduc Nomenclatore sub uno.

Ut si sint reducenda. $4\,ij + \frac{2\,j}{1.\,iij}$ & $\frac{3\,ij}{1.\,v.}$ primo reduces Integrum & fractum ad fractum idem. & fient. $\frac{4\,ij}{1} \mathrm{X} \frac{2.\,j}{1.\,iij.}$

$$\frac{4.\,v. \quad 2.\,j}{1.\,iij.}$$

Deinde priùs reductum integrum & fractum reduces cum alio fracto ad eamdem denominationem. sic $\frac{4.\,v. + 2.\,j}{1.\,iij} \mathrm{X} \frac{3\,ij}{1.\,v.}$

$$\frac{4.\,x + 2.\,vj. \quad 3.\,v.}{1.\,viij.}$$

CAPUT X.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione & Divisione Fractionum Algebraicarum.

HAs quatuor Praxes parili ratione operare
Ac in vulgari; nisi quòd duplici utere Signo.

ADDITIO.

Fractis adductis Nomenclatore sub uno,
Omnes junge simul Numerantes ante reductos,
Ac Signum Numerantibus interponito Pluris.

Ut ſi addendi ſint. $\frac{4\,j}{3} \times \frac{5\,ij}{4\,iij}$

ſic reduces $\frac{16\,jv \quad 15\,ij}{12\,iij}$

Sic Numerantes reductos addes interponendo ſignum P. per primum Caſum Cap. quarti. $\frac{16\,jv + 15\,ij.}{12\,iij.}$

SUBTRACTIO.

Ut priùs adductis Nomenclatore ſub uno,
Uulgari praxi Numerantem hunc ſubtrahe ab illo,
Hos ſi opus eſt ad primos partitione reduces.

Ut ſi proponantur.

$\frac{4\,j}{3}$ Subtrahendæ à $\frac{16\,jv + 15\,ij.}{12\,iij}$

Sic adduces ad eandem denominationem.

$\frac{4\,j}{3} \times \frac{16\,jv. + 15\,ij.}{12\,iij.}$

$\frac{48\,jv \quad 48\,jv + 45\,ij}{36\,iij.}$

Subtractio. $48\,jv + 45\,ij.$
$48\,jv.$

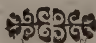
Reliquum. $\frac{45\,ij}{36\,iij}$ id eſt $\frac{5\,ij}{4\,iij.}$ per 9

MULTIPLICATIO.

Duc in ſe ſocios; Signa adijce, & addito Formas.
Tum ſi opus eſt ad primos partitione reduces.

Ut ſi ſint multiplicandi. $\frac{16\,jv + 15\,ij.}{12\,iij}$ per $\frac{4\,j}{3.}$

fient $\frac{64\,v + 60\,iij}{36\,iij}$ id eſt per 4. $\frac{16\,v + 15\,iij}{9\,iij.}$



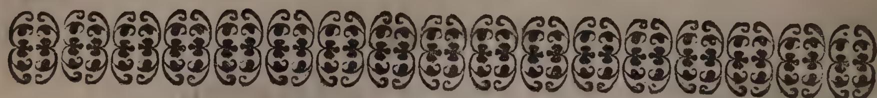
DIVISIO.

Dividito Numeros; Signa adijce, ſubtrahe Formas.

Ut ſi dividendi ſint. $\frac{16\,v + 15\,iij}{9\,iij}$ per $\frac{4\,j}{3}$ ($\frac{4\,jv + 3\frac{3}{4}\,ij}{3\,iij}$

Item $\frac{48\,v + 45\,iij}{9\,iij}$ per $\frac{16\,v. + 15\,iij}{9\,iij}$ (3 + 3 id eſt 6.





LIBER NONUS.
DE REGULA ALGEBRÆ.

CAPUT PRIMUM.

Quid sit & quàm excellens.



AUREA Norma Trium; si quid pretiosius auro,
Regula nostra hæc Algebræ plusquàm Aurea nobis.
Quinetiam Angelico reputata est nomine digna:
Ecquid enim tàm est Angelicum, quàm occulta videre;
Occultos animi sensus, secretaque cordis,
Unius ad fatum numeri, reserare latentis?
Hanc ergo Angelicam methodum hîc aperire voluntas.

CAPUT II.

Textus Regulæ Algebræ.

QUando tibi solvenda offertur quæstio quædam,
Per quam aliquis numerus proponitur inveniendus;
Pone loco ignoti numeri, qui quæritur, unam
Radicem; aut totidem, quot erunt numeri inveniendi,
Ponito Radices; quin si numerus quis, alius
Multiplus fuerit, juxta multiplicitatem,
Radicum crescat numerus, Formâ remanente.
Dein vel ad hanc, vel ad has, quas quæstio continet, omnes
Examen subeant partes, dum Æquatio fiat:
Ista reducatur, si opus est: Algebraicæque
Per numerum Formæ majoris, divide partem
Æquati oppositam; vel Radicem extrahe ab ipsa,
Quam Forma ostendit: Numerum, in quotiente, petitum,

Occultum priùs, aut ipſâ in Radice, videbis.
Exemplis hæc Sole magis tibi clara patebunt.

CAPUT III.

Exemplum Occulti numeri, Inventi per Regulam Algebræ, ſub poſitione unius tantùm Radicis.

ECce tibi ſolvenda offertur quæſtio talis:
Quis numerus, de quo cùm tertia, quartaque partes
Ablatæ fuerint, Reliquum Denarius exſtat?

Operationes.

Pone loco Ignoti Numeri qui quæritur, unam
Radicem: Cùm autem Radix Numeruſque putentur
Unum & idem; Numeri pars tertia, tertia pars eſt
Radicis; Numeri & quæ quarta eſt, quarta quoque eſt pars
Radicis: ſi adducantur ſub nomine eodem,
Tertia, quartaque, dant partes ſeptem duodenas;
Nam faciunt junctæ pars tertia, quartaque, ſeptem:
Partibus ex ſeptem duodenis quinque ſuperſunt.
Atqui cum partes duodenæ æquentur & unum
Sint cum ipſo numero, unum erit & denarius ipſe
Cum quinque; ac cum ſeptem, tertia quartaque partes;
Hocque modo, quæſita utrobique Æquatio prodit:
Sufficit æquari hîc duodenum quinque, decemque.
Adduc illa duo Nomenclatore ſub uno;
Solos dividito Numerantes, nempé minore
Dividito Numerum majorem; Reſque peracta eſt.
Occultus numerus tandem in quotiente patebit;
Ipſius & quænam ſint tertia, quartaque partes,
Per tria, per quatuor ſecto quotiente videbis,
Ac Reliquum ſupereſſe Decem: quod erat faciendum.

EXEMPLVM.

Quis numerus à quo ablatis tertia & quarta patribus ſupereſt 10?

Verte.

Operationes.

Operatio 1ª.	2ª.		3ª.	4ª.	5ª.
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$	3 & 4 faciunt 7, 7 ex 12, restant 5.	5. æquatur 10. sicut j. 12.	$\frac{10}{1} \times \frac{5}{12}$	1	24 (8.
4 3			120. 5	120 (24	3
12			12	8	24 (6.
				8	4
					8, 6 & 10,
					24

EXEMPLVM II.

In quo plures Radices sunt positæ, atque ex iis quædam aliarum multiplices.

QUamvis Radices plures ponantur, ad unam
Attamen Algebræ tota hæc operatio spectat.

Ut si ponatur 360. dividendus in tres partes quarum secunda sit dupla primæ & tertia tripla etiam primæ. Pone pro primo numero occulto 1. j. Pro secundo 2. j. Pro tertio 3. j. Tum junctis 1 & 2 & 3, habebis 6 pro numero Radicum, & per 6 divides 360, veniet in quotiente 60, qui erit valor primæ Radicis ad quam cæterarum valorem habebis; nempé pro duabus 120, & pro tribus 180, quæ omnes constituunt numerum 360.

CAPUT IV.

Major Explicatio Regulæ Algebræ.

IN quatuor scissa est Algebræ Regula partes;
Semper binæ insunt; Æquatio, Partitioque;
Sæpé Reductio abest, Radicum Extractio sæpé.
Harum majorem lubet hîc apponere sensum.

De Æquatione.

Par diversorum valor, est Æquatio dicta:
Libra valet viginti asses; pars tertia scuti est.
Septuaginta duo, bis sex Radicibus æqua,
Si sex supponas Radicem quamque valere.
Hac in praxi est invenienda Æquatio semper
Inter Formam Algebraicam, partem oppositamque:

Cùm ſolam, nec bis poſitam hac in parte vel illâ,
Majorem hanc Formam cernes; Diviſio fiat.
At, cùm nec ſolam Formam, vel bis poſitam eſſe
Cernes hac aut illâ parte; Reductio fiat.

Ex. I.

Ut ſi æquatio fuerit inventa inter 12.j. & 72. tunc diviſio fiat, quia tum 12.j. nihil habet adjunctum, tum quia Forma j. non eſt in alia parte. Et dividendo 72 per 12. venit in quotiente (6, qui valor eſt unius Radicis.

Ex. II.

Sic ſi æquatio fuerit inventa inter $\frac{5}{12}$ j & 10. tunc diviſio fiat poſt quam adducta fuerint $\frac{5}{12}$ & 10 ſub eodem denominatore ut ſupra.

Ex. III.

At ſi inventa eſſet æquatio inter 9. j — 12 & 42. vel inter 9. j & 72 — 3 j. quia in primo exemplo radix non eſt ſola; & in ſecundo radix eſt utrabique; ideò Reductio facienda ut ſequitur.

CAPUT V.

De Reductione aut Tranſpoſitione Æquationis.

ERgo Reducenda eſt Æquatio, cùm nec adeſſe
Solam majorem Formam, vel bis poſitam eſſe
Conſpicies hac parte vel illâ: Sicque Reduces.
Quando in parte aliquâ Signum Minus, ipſius adde
Hinc illinc numerum, tunc juſta Æquatio fiet:
A quâ retrahitur Signum Minus, additur ipſi.
Si Pluris ſignum ſit; ſubtrahe parte ab utraque
Ipſius Numerum, tunc juſta Æquatio fiet.
Sic Signum Minus in Signum tranſponito Pluris;
Et Pluris Signum in Signum tranſpone Minoris.
Hæcque tibi ſemper generalis Norma tenenda eſt.
Radices ſolæ, Numero; Quadrataque ſola
Et Radicibus æquentur Numeroque: Cuboſque
Solos Quadratis, Radicibus & Numero æqua.

Æquationes Reducendæ.

Ex. I. 9 j — 12 O 42	Reductio.	*Ex. I.* 9 j. O. 54
Ex. II. 9. j. O 72 — 3 j.	R.	*Ex. II.* 12. j. O 72
Ex. III. 1. ij — 3 j. O 108	R.	*Ex. III.* 1. ij. O 3 j. † 108
Ex. IV. 5. ij † 20 O 100	R.	*Ex. IV.* 5. ij O 80.
Ex. V. 3. ij † 2 j O 56	R.	*Ex. V.* 3. ij O 56 — 2 j.
Ex. VI. 9 j † 12 O 78 — 2 j.	R.	*Ex. VI.* 1ª. Reductio tollendo † 12. 9 j. O 66 — 2 j. 2ª. Reductio addendo — 2 j. 11. j. O 66.

CAPUT VI.

Varij Casus Reductionis Æquationum.

CUm posita in variis sit tota Reductio Signis;
Hæc serva, ut meliùs Signorum Operatio fiat.

Primus Casus.

Cùm Signum, tantùm pars una, Minoris habebit;
Tum Numerus, tùm Forma sequens addatur utrinque:
Adduntur Numeri aut Formæ quæ non retrahuntur.
A quâ retrahitur Signum Minus, additur ipsi.

Ex. I.

Reducenda 2 ij — 3 j O 104 Reducta 2 ij O 3 j † 104.

Ex. II.

5 ij — 40 O 10. j. Reduc. 5 ij O 10. j. † 40.

Secundus

Secundus Casus.

Cum Signum Pluris, tantùm pars unica habebit;
Vel numerus, vel Forma ſequens retrahatur utrinque.

Ex. I.

Reducend. 11. j † 12 O 78 Reducta 11. j O 66.

Ex. II.

3 j. † 6 O 24 R. 3 j O 18

Ex. III.

5 ij † 20 O 100 R. 5 ij O 80

Ex. IV.

3 ij † 2. j O 56 R. 3 ij O 56 — 2. j.

Tertius Casus.

Cum Signum pars una Minoris, & altera Pluris;
Adde in parte utraque Minus; Plus ſubtrahe utrinque.

Ex. I. *Ex. I.*

Reducend. 9. j. † 12 O 78 -- 2. j Reduct. { 1ª. 11. j † 12 O 78. 2ª. 11. j O 66

Ex. II. *Ex. II.*

5 ij — 3 j O 3 ij † 20. Red. { 1ª. 5. ij O 3 ij † 3. j † 20. 2ª. 2 ij O 3. j † 20.

Quartus Casus.

Si duo Signa in parte unâ diverſa notentur;
Quod Minus addatur, quod Plus retrahatur utrinque.

Ut 108 † 8 j O 2. ij -- 12 j. † 60. Reductio { 1ª. 108 † 20 j O 2. ij † 60. 2ª. 2 ij O 20 j † 48.

Quintus Casus.

Si duo Signa in parte utrâ diverſa notentur,

Inter Signa eadem fiat Subtractio utrinque.

Ut 6 j --- 10 O 10. j --- 34 Reductio. 1ª. 6. j O 10 j -- 24
2ª. 0. j O 4. j -- 24
3ª. 24 O 4. j.

CAPUT VII.

Axiomata Reductionum.

Primum.

Signa eadem retrahunt; addunt diversaque Signa.

Ex. I. *Ex. I.*

6. j. --- 10 O 10. j --- 34 Red. { 1ª. 6. j O 10. j — 24
2ª. 4. j O 24.

Ex. II.

6. j † 6 O 12 j --- 30 Red. { 1ª. 6. j --- 30. O 6.
2ª. 6. j O 36.

Secundum.

In Signo Pluri retrahe; in Signo adde Minori.

Ex. I. *Ex. I.*

4 j. † 8 O 96. Red. 4 j. O 88.

Ex. II. *Ex. II.*

6 j O 12 j -- 24. Red. 6. j. O 24.

Tertium.

Si retrahas, si addas; hinc, illinc, subtrahe & adde.

Ex. I.

4 j † 8 O 96 subtr. 4 j. O 88.

Ex. II. *Ex. II.*

4 j. --- 8 O 80 addit. 4 j. O 88.

Quartum.

Ex æquis, æquis ſublatis, æqua ſuperſunt.

Ut ſi ab æquis 1. j O $\frac{7}{12}$ j † 15 tollas utrinq; $\frac{7}{12}$ j. æqua ſuperſũt $\frac{5}{12}$ j O 15.

Quintum.

Sic æqualia erunt, ſi addas æqualibus æqua.

Ut ſi ad 4 j — 8 O 80. addas utrinque 8. fient æqua 4. j & 88.

Sextum.

Quæ fuerint æqua uni, hæc ad ſe æqualia ſunto.

Septimum.

Formam Algebraicam ſolam parti oppoſitæ æqua.
Hinc illinc retrahe, addeque, dum hæc Æquatio fiat.
Partes æquentur variæ, ut Diviſio fiat.

CAPUT VIII.

De Æquatione per Reductionem Fractorum.

IN Cruce multiplica, ut Fractorum Æquatio fiat;
Ipſa reducatur, ſi opus eſt; te dicta docebunt.

Exemplum I.

Ut ſi ſint reducendi. $\frac{3.\,j \dagger 12}{5}$ O X $\frac{36\ ij - 19\,8.\,j.}{3\,j.}$

Multiplica in Cruce & fient. 9 ij † 36 j O 180 ij — 990. j Reductio 19. j O 114.

Ad minimas formas & Ad minimos termi-mines per 9. 1. j † 4 O 20 j — 110. Reducta 19. j O 114.

Exemplum II.

$$\frac{4j + 18}{1.j} \bigcirc \frac{12j --- 58}{2} \quad X$$

8j † 36 O 12ij --- 58j Reducta 66.j † 36 O 12ij.

Si Res æquetur fracto, unum ponito pro Re.

$$\text{Ut } \frac{5}{4 + 1.j} \bigcirc \frac{1}{1} \quad X$$ vel ſcutum aut res alia.

Reductio 1.j & 1.

5 O 4 † j.

CAPUT IX.

De Diviſione quam præcipit Algebræ Regula.

PEr Numerum Formæ majoris divide partem
Æquati oppoſitam; vel Radicem extrahe ab ipſa.
Si major Forma eſt Radix, Diviſio fiat:
Si Forma eſt major Radice, Extractio fiat.
Per Numerum Formæ cum dividis, abijce Formam.

Exemplum I.

Si inventa eſt æquatio inter 7 j. & 42, tunc fiat diviſio ob cauſas ſupra dictas cap. 4.

Sic $\frac{42}{7}$ (6. valor unius radicis.

Exemplum II.

6j O 72 | $\frac{72}{6}$ (12 eſt valor unius j.

Ex. III.

12j. O 72 | $\frac{72}{12}$ (12 eſt valor unius j.

CAPUT X.

De Præparatione ad Extractiones Radicum, ſeu de Reductione aut abbreviatione Formarum ad minimas & ad Numeros ſine Forma, quos vocant abſolutos.

Cum nullum Numerum ſine formâ Æquatio habebit,
Semper ut é numero ſine forma Extractio fiat;
Forma minor de majori Forma retrahatur:
Quæ Forma anté fuit, fiet Numerus ſine formâ,
Ut ſic ad Formam majorem Extractio fiat,
Aut ſi major ſit Radix, Diviſio fiat.
Iſta Reductio dicta eſt abbreviatio Formæ.
Algebriſtæ vocant hypobibaſmum, id eſt deſcenſum ſen depreſſionem.

Exemplum I.

Si ſit æquatio inter 2 ij & 12 j. quia ibi nullus numerus ſine forma, retrahatur j à ij & fiet 2 j. & 12.

Exemplum II.

Si ſit æquatio inter 10. vj & 466560 iij, ſic abbreviandæ formæ per ſubtractionem minoris à majore, 10 iij & 466560. Unde Extractio Cubica.

Ad minimas Formas, ac ad Numeros ſine Forma,
Majores quaſvis Formas hac arte reduces;
Dummodò ſint illæ Formæ in diſtantibus à ſe
Progreſſu æquali ſpatiis: Retrahendo minorem
Omnibus ex aliis, ac ipsâ deinde retracta
Ex ſeſe, (quod idem eſt ac ſi foret ipſa reducta
Ad Numerum) minimas ſic Formas omnium habebis.

Ut ſi ſit æquatio inter 1. vj. & 1. v. † 35156. jv
vel 1. v. & 1. jv † 35156 iij
vel 1. jv & 1. iij † 35156 ij.
{ Quia à ſe invicem diſtant æqualiſpatio ſeu arithmeticé, ideò has omnes Reduces

Ad 1. ij & 1. j † 35156. *retrahendo minorem ex omnibus aliis ac deinde ex ſeipſa ut fiat* 0. *id eſt Numerus ſine forma.*

At si uni tantum immediatè proxima Forma
Æquetur; quamvis sit nulla Reductio facta:
Majoris Formæ Numero partire minorem,
Unius in quotiente valor Radicis habetur;
Et sic Radicum jamjam est Extractio facta.

Ut si sit æquatio inter 5 v. & 30 jv. per 5 dividatur 30 & fiet. (6 valor unius Radicis.

Et quamvis Formæ nondùm essent abbreviatæ;
Sic docet illarum interse distantia, quænam
Radix ex quovis fuerit quotiente trahenda.
Si Formas inter, fuerit distantia tantùm
Unius Formæ, Radix quadrata trahenda est:
At si binarum, Cubica; & quadratoquadrata,
Illa trium Formarum à se distantia si sit.

Ut si sit æquatio inter 3 jv. & 12 ij. extrahenda erit Radix quadrata; quia inter jv & ij mediat tantùm unica Forma, iij.

Si inter 4. vj & 9 iij. tunc Cubica quia duæ formæ mediant.

Si inter 20. vj. & 30. ij. tunc quadratoquadrata, &c.

Cùm Forma est major Radice, Extractio fiat,
Quadratæ, quando major sit forma Quadrata;
Vel Cubicæ si sit Cubica; aut quadratoquadratæ
Radicis, fuerit si Forma Quadratoquadrata:
Sic Formam ad majorem est Radix quæque trahenda.

Ut si æquatio sit inter 2 ij & 144 — 12 j, erit (facta prius divisione, ut æquales sint 1. ij & 72 — 6 j) extrahenda radix quadrata ex 72 — 6 j. quia forma major est ij.

Sic inter 1. ij & 6 j † 72. erit extrahenda quadrata.

Sic inter 10 iij & 466560, facta divisione erit extrahenda cubica ex 46656.

Cum Radix aliqua, ex Numero Formaque trahenda est,
Dummodò sit numerus solus cum simplice Forma;
Abjectâ Formâ Radicem quærito tantùm
Ipsius Numeri: qualem autem sumpseris illam,
Hac Formam partire, dabit quotiens tibi nomen
Radicis quæ de numero Formâque trahenda est.

Ut si invenienda sit radix quadrata 144 ij. radix quadr. 144 est 12. dividatur ij per ij fit j. Ergo 12 j est radix quadrata 144 ij.

Sic radix quadrata 144 vj est 12 iij, quia divisus vj per ij dat in quotiente iij.

Sic radix cubica 64 iij, est 4 j. quia radix cubica, 64 est 4, & iij divisus per iij dat j.

Item radix quadrata 25 jv est 5 ij. nam 5 est radix 25, & jv per ij divisus dat ij.

Item radix quadratoquadrata 16 viij est 2 ij. nam viij divisus per jv. qq. dat ij.

Sic radix surdesolida 32 x est 2 ij, quia x per v. divisus dat ij.

Sic radix quadratoquadrata 81 jv est 3 j. quia 3 est radix qq. 81. & jv per jv divisus dat j.

CAPUT XI.

De Radicum Extractione quam præcipit Regula Algebræ.

CUm Forma est major Radice, Extractio fiat
De Numero propé quem Forma haud apponitur ulla.
Ut teneas animo AMASIAS dabit has tibi Praxes.

Prima Praxis.

A Numero incipiens Radicum, hunc dimidiato;
Dimidium hunc Numerum servato, ac abjice Formam;
Servato dum sit finita operatio tota.

	Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*
Quia in his Ex. Forma scilicet ij est major j. ideò fiat Extractio.	1.ij O 72 -- 6 j. dimidium numeri j. scilicet 6 est 3. servandum — 3.	1.ij O 6 j † 72 dimidium numeri radicum est 3. servandum † 3.	1.ij O 18 j -- 72. dimidium numeri radicum 18. est 9. servandum † 9.

Ex. IV.

1.ij O 54 † 3 j.
dimidium 3 est.
— $1\frac{1}{2}$

Secunda Praxis.

MUltiplica in ſe dimidium, venit inde Quadratum.

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*	*Ex. IV.*
3 in ſe facit 9.	3 in ſe facit 9.	9 in ſe facit 81.	$1\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{9}{4}$.

Tertia Praxis.

ADde Quadratum hoc ad numerum additione notatum: Subtrahe de numero, ſi Signum illi Minus adſit.

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*	*Ex. IV.*
Quia 72 habet ſignum add. †, ideò ei addendum eſt 9 & fit 81.	ſic adde ad † 72, 9, & fit 81.	quia eſt — 72 ſubtrahe 72 de 81 (quia ſemper major de minore trahendus) & fit 9.	quia eſt † 54 ideò addo $\frac{9}{4}$ id eſt $2\frac{1}{4}$ & fit $56\frac{1}{4}$.

Quarta Praxis.

INvenienda eſt, é Facto Radixque trahenda,

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*	*Ex. IV.*
Radix quadrata 81 eſt 9.	Radix quadrata 81 eſt 9.	Radix quadrata 9 eſt 3.	Radix quadrata $56\frac{1}{4}$ eſt $\frac{15}{2}$ id eſt $7\frac{1}{2}$.

ADde ad Radicem ſervatum dimidiatum:
Subtrahe de Radice inventa dimidiatum:
Addito ſi ſervatum habeat Signum additionis;
Subtrahe ſi ſubducendi Signum appoſitum ſit.

Ex. I.	*Ex. II.*	*Ex. III.*	*Ex. IV.*
Ut quia — 3 dimidium ſervatum habet ſignum — ideo ſubtrahe à radice 9 & remanent 6, valor radicis.	quia † 3 ideo addo ad 9 & fit 12.	quia † 9 addo ad 3 & fit 12.	quia — $1\frac{1}{2}$ ſubtraho de $7\frac{1}{2}$ & remanet 6.
Ergo radix 72 - 6 j eſt 6.	Radix 6 j † 72 eſt 12.	Radix 18 j - 72 eſt 12.	Radix 54 — 3 j. eſt 6.

CAPUT

CAPUT XII.

De Numeris binas Radices habentibus.

TUnc poterit Numeris duplex contingere Radix,
Cum positum est Signum Minus ad numerum sine formâ,
Dat primam praxis præcedens: altera vero
Sic veniet: per præcedentem, inventa quadrata
Servato de dimidio Radix retrahatur.

Ex. I.

Ut in 3° Ex. supraposito 18 j — 72, quia numerus sine forma 72 habet signum minus ideò duplicem habebit Radicem. Primam quæ jam extracta est. Altera seu minor sic habebitur. Radix 3 inventa per quartam praxim retrahatur de dimidio numero Radicum servato, & remanet 6 pro Radice minore. Nam 18 j valent 108. si radix est 6. ablatis autem 72 ex 108. remanent 36. quadratum radicis 6.

Ex. II.

20 j. — 96. sumpto dimidio numeri radicum, 10. & ex ipsius quadrato 100 sublatis 96, remanent 4, cujus radix quadrata est 2. quâ addita ad dimidium servatum 10 fit 12 pro prima radice: altera autem habebitur si 2 retrahas ex 10, & 8 erit secunda radix.

At quando is numerus, quadratum dimidiati
Radicum fuerit, tunc illi est unica Radix.

Ut 1. ij & 12 j. — 36. quia 36 est quadratum 6, dimidij numeri Radicum, ideò est unica radix.

Majores Cubicâ Radices abbreviatæ
Et duplicem inter sese servantes rationem,
Sic ut formam aliquam componat forma quadrata
Juncta alij formæ, binas ita quæque ministrant
Radices: Primùm Radix quadrata trahenda est
De parte oppositâ, velut esset forma quadrata
Major composita; ac Radix est deinde trahenda
Ex radice ipsâ, qualem indicat altera forma
Quæ media est inter numerum formamque priorem.

Ut si sit æquatio inter 1. jv & 18 ij — 648. 1°. extrahenda est radix quadrata de parte opposita majori formæ, scilicet 18 ij — 648, per præce-

dentem praxim, & veniet 36. Unde etiam extrahenda eſt radix quadrata quia forma media inter majorem & numerum eſt ij.

Sic ex 1. viij & 20000 jv — 78461119. 1°. extrahenda eſt radix quadrata ac deinde quadratoquadrata ex radice quadrata inventa, quia altera forma eſt jv ſeu quadratoquadrata.

CAPUT VIII.

De Secundis Radicibus & earum Characteribus.

POnendæ ſunt diverſi quandoque valoris
Radices, quas Artiſtæ dixere Secundas,
Nomine communi; licèt omnibus eſſe Secundas
Sæpé haud conveniat: namque ex his, una ſecunda eſt,
Tertia & eſt alia, aut quarta; ut quo quæque locatur
Ordine, ſic propriâ de ſede vocabula ſumat.
Et ne te ſimilis turbet confuſio Formæ,
Formas his alias dabimus, quas pagina monſtrat:
Quæ quamvis alijs alium arripiantur in uſum,
Nil moror, ijs licèt in rebus ſuprema voluntas
Sit ratio, tamen hæ formæ haud ratione carebunt,
Ob ſimiles, quas hîc cernis, cum ſede figuras.
Sed quia permixtim primis Radicibus iſtæ
Ponuntur, nomen Notularum imponimus illis,
Nominis ut Formæ non te confuſio turbet.
Sæpé locum tantùm ſignant Notulæ, ſine Forma.

Typus Secundarum Radicum cum ſuis Formis quas Notulas vocamus.

		2ª. radix.	3ª. rad.	4ª. rad.	5ª. rad.	
Radix Prima, j	Radices Secundæ;	2.	3.	4.	5.	&c.

Quandonam Secundæ Radices in uſum veniant.

PRopoſitos ſi inter numeros Proportio detur,
Radices tantùm Primæ aſſumentur in uſum:
At quando plures numeri, & Proportio nulla
Inter eos fuerit data; tunc primus ſibi Primas

Radices ſumet, reliqui ſumentque Secundas.

Ut ſi proponerentur quærendi duo numeri in proportione quadrupla, qui additi facerent 100: ad hoc ſufficerent primæ Radices. Sic pro minore poneretur 1, j. pro majore 4 j. id eſt, additi, 5 j. O. 100. unde diviſus 100 per 5, dat pro minore 20 pro majore 80.

At ſi proponerentur tres numeri quorum primus & ſecundus ſuperarent tertium 42; primus & tertius ſuperarent ſecundum 34; ſecundus denique & tertius ſuperarent primum 27; quæreturque quiſnam eſſet numerus ſingulorum, eorumque ſumma; quia nulla datur proportio tunc poneretur pro primo 1. j. pro ſecundo 1. ƶ. & pro tertio 1. ȝ. &c.

CAPUT XIV.

De quatuor Operationibus Secundarum Radicum.

Hic Algebraicis ſimilis, repetendaque Praxis,
Tam multas poteram bené prætermittere Praxes;
Nam Decimus Liber has omnes ſupplebit abundé:
Quin primis Radicibus has ſupplere ſolemus,
Inter eas Signum apponendo Pluſve Minuſve.
Cum ſit enim varius valor, hæ ſejungier optant.

ADDITIO.

Cùm variæ Notulæ; Numeris Notuliſque retentis
Additio ut fiat, Signum interponito Pluris.
Ut ſi addas 5 ƶ cum 6 ȝ, fient 5 ƶ † 6 ȝ.
Quando eædem; Notulam Numeris apponito junctis.
Ut ſi addas 5 ƶ cum 4 ƶ, fient 9 ƶ.

SUBTRACTIO.

Cum variæ Notulæ, Signum interpone Minoris:
Majorem Notulam, Notulæ præpone Minori.
Ut ſi tollas 6 ƶ de 8 ȝ, remanent 8 ȝ — 6 ƶ.
Si verò fuerint eædem, Subtractio fiet,
Majore ex numero numerum retrahendo minorem,
Communi Notulâ remanente, ut in Additione.
Ut ſi tollas 5 ƶ de 9 ƶ, remanent 4 ƶ.
Sic ſi 21 ȝ de 24 ȝ, remanent 3 ȝ.

MULTIPLICATIO.

Ut bené multiplices, hæc ſerva: Sæpé Secundæ
Radices apponuntur ſolæ ſine formis,
Aut numeris; ſæpé anteferunt formas numeroſque;
Sæpiùs at formas poſtponunt: hos tibi Caſus,
Ac plures alios multa hæc operatio donat.

Primus Caſus.

Si Numerus primæ Radicis multiplicetur
Per numerum Notulæ quæ ſola ſit; utraque forma,
Ordine quo fuit interſeſe multiplicata,
Ponatur, numeros pone in ſe multiplicatos.

Ut ex 2. j. in 2 ƶ fiunt 4 j ƶ. id eſt 4. j. multiplicatæ in 1 ƶ.
Sic ex 2 ƶ in 2 j. fiunt 4 ƶ j. id eſt 4 ƶ multiplicatæ in 1. j.
Sic ex 3 ij in 4 ʒ. fiunt 12 ij ʒ. id eſt 12 ij. multiplicatæ in 1. ʒ.
Sic ex 1. j. in 1. ƶ fit 1. j. ƶ. id eſt 1. j. multiplicata in 1. ƶ.

Secundus Caſus.

Per Numerum, Numerus Notulæ ſi multiplicetur,
Accreſcet ſolus numerus, Notulâ remanente.

Ut ex 6 in 3 ꝝ. fiunt 18 ꝝ.
Sic ex 7 in 4 ʒ. fiunt 28 ʒ.

Tertius Caſus.

At numerus Notulæ, numero ſi multiplicetur
Alterius Notulæ quæ ſit variæ ſpeciei;
Poſt factos numeros, Notulas apponito utraſque.

Ut ex 3 ƶ in 9 ʒ. fiunt 27 ƶ ʒ. id eſt 27 ƶ. multiplicatæ in 1 ʒ.

Quartus Caſus.

Si numerus Notulæ, numero ſit multiplicatus
Alterius Notulæ quæ eſt ejuſdem ſpeciei
Poſt factos numeros, Notulam, dein pone quadratum.

Ut ex 3 ƶ in 4 ƶ. fiunt 12 ƶ ij.

Quintus Caſus.

Si numerus Notulæ, vel quadraté, Cubicéve

Qualibet aut ratione alia in ſe multiplicetur:
Et factum, & Notulam, & Formam adjice multiplicati.

Ut ex 1 ƺ in ſe quadratè fit 1. ƺ ij. id eſt 1. ij. ſecundæ radicis.

Sic ex 1. j. ƺ in 1 j ƺ. fit 1. ij ƺ ij. id eſt 1. ij primæ radicis ductus in ij. ſecundæ radicis.

Sic 3 ʒ in ſe quadratè faciunt 9 ʒ ij.

Sic 3 ʒ in ſe cubicè faciunt 27 ʒ iij.

Sextus Caſus.

Cum numerus Notulæ in numerum Notulæ ſpeciei
Ejuſdem, quæ formam habeat ſit multiplicatus;
Cenſetur primus formam Radicis habere.

Ut ex 1. ƺ in 1. ƺ ij fit 1. ƺ iij. quia additur ad ij, j qui cenſetur adeſſe in prima notula.

Sic ex 3 ʒ in 4 ʒ iij. fiunt 12 jv quia additur j ad iij.

Septimus Caſus.

Cum numerus Formæ, in numerum qui habeat Notulamque
Formamque, eſt ductus, numeri in ſe multiplicantur;
Poſt factum, Formas pone & Notulam inter utraſque.

Ut ex 2 iij in 4 ƺ ij. fiunt 8 iij ƺ ij. hoc eſt 8 iij multiplicati in 1 ƺ ij.

Sic ex 1. iij in j ƺ ij fit 1. jv ƺ ij. id eſt 1. jv ductus in 1. ƺ ij.

Octavus Caſus.

Cùm Numerum Notulæ ac Formæ quis multiplicabit
Per numerum Notulæ ac Formæ; vel ſint ſpeciei
Ejuſdem aut variæ, numeris tunc multiplicatis,
Et Formis junctis, ponet Notulam inter utraſque.

Ut ex 2 ƺ ij in 5 ƺ iij. fiunt 10 ƺ v.

Item ex 3 ƺ ij in 4 ʒ iij. fiunt 12 ƺ ʒ v.

Nonus Caſus.

Cùm numerum Notulæ ac Formæ quis multiplicabit
Per numerum Formæ ac Notulæ; producitur inde
Poſterior numerus Formæ ac Notulæ, prior autem
Forma incremento Notulæ Radicis habentis,
Ut Sexto in Caſu dictum eſt, apponitur aucta.

Ut ex 1 ƺ iij in. 1. ij ƺ. fit 1. ij ƺ jv.

Sic ex 3 ♃ ij in 4 iij ♃. fiunt 12 iij ♃ iij. id eſt 12 iij. multiplicati in 1 ♃ iij.

Hos Caſus quidam cenſent ſic abbreviari
Si Notulæ ejuſdem ſpeciei; multiplicabis
Utroſque in ſe numeros, Notulas ſimul addes
Notulas ut ſunt poſtponito facto.
Si variæ; notulæ ut ſunt poſt factum adjiciendæ.

Ex. I. In quo notulæ ſunt ejuſdem ſpeciei.

Ex 4 ♃ in 7 ♃. fiunt 28 ♃ ij quia ♃ & ♃ id eſt j ♃ & j ♃ faciunt ij.

Ex. II. In quo variæ notulæ.

Ex 3 j in 5 ♃ fiunt 15 j ♃.

DIVISIO.

Partitio ut fiat, retrahet Subtractio Formas:
Diviſis numeris, Notulam Formamve relinque.

Ut ſi dividas 8 iij ♃ ij per 4 ♃ ij. retractis ♃ ij à ♃ ij & diviſis 8 iij per 4, quotiens erit. (2 iij.

Sic 8 iij ♃ ij per 4 iij. ſubtracto iij à iij, diverſiſque 8 per 4 quotiens erit. (2 ♃ ij.

At ſi per Numerum Notulæ Diviſio fiat
Radicis numeri, tunc ex iis Fractio fiet.

Ut ſi dividas 2 j per 4 ♃, fit quotiens $\frac{2\,j}{4\,♃}$

CAPUT XV.

Extractio Secundarum Radicum.

E Numero, Formâ rejectâ, Extractio fiat.

Ut radix quadrata numeri 25 ♃ ij, eſt 5 ♃.
Et radix cubica numeri 27 ♃ iij eſt 3 ♃.
Et radix quadratoquadrata 16 ♄ eſt 2 ♄.

At quando Forma, aut numerus, Radice carebit
Quæ petitur, numeros ad Surdos iſta remitte,

Dando notam Surdi, Formis, numeris Notulisque.

Ut si petatur radix cubica numeri 3 x ij; sic notabis √ iij 3 x ij.
Sic radix quadrata numeri 4 x iij notabitur √ ij 4 x iij.

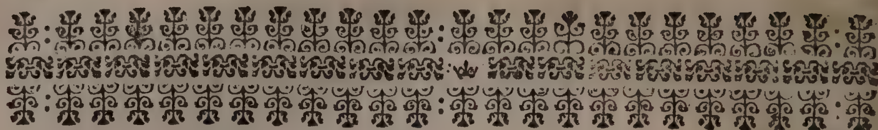
CAPUT XVI.

Quomodo per Regulam Algebræ cognoscatur utrum quæstio sit possibilis nec ne, inepta aut nugatoria.

AN sit possibilis, vel inepta, aut quæstio plena
Nugarum, Algebrâ poteris cognoscere certò,
Si minor æquetur majori; Formaque eidem
Æquetur Formæ, numerus numero quoque eidem;
Dic impossibilem, dic nugatoriam, ineptam.

Ut si veniat æquatio inter 6 j & 24 j.
Vel inter 3 ij † 5 & 2 ij † 4.
Vel inter 8 ij & 8 ij.





LIBER DECIMUS.

EXPLICATIO GALLICA ALGEBRÆ.

Novaque Analysis, seu inveniendorum Occultorum Numerorum methodus per Arithmeticam vulgarem; Et ad quarumcumque Quæstionum Resolutionem utriusque applicatio.



'ALGEBRE est une Arithmetique plus relevée que l'Arithmetique commune, puisqu'elle peut resoudre toutes les questions possibles qui se font sur les Nombres, quelque cachez & inconnus qu'ils soient, que l'autre ne peut resoudre.

Ce qui se fait par le moyen d'une seule Regle, qu'on appelle par excellence la Regle d'Algebre, que nous donnerons apres avoir expliqué les figures & marques dont on se sert en cet Art.

Dans l'Algebre on n'employe pour nombres que des Progressions Geometriques multiples, qui commencent par l'unité, comme sont les Progressions doubles, ou triples, ou quadruples, &c. Et pour marquer les démarches de ces Progressions, c'est à dire, les Racines, qui est la premiere démarche apres l'unité; les Quarrez qui sont la seconde, les Cubes qui sont à la troisiéme, les quarrez de quarrez qui est la quatriéme, &c. Au lieu des figures ou marques dont les autres Auteurs se sont servis, nous nous servirons de chifres Romains, à qui nous donnerons le nom de Formes; & pour cette premiere fois nous mettrons leurs noms & leurs premieres lettres dont quelques-uns se servent pour les exprimer, avec un Exemple de progression au dessous. Nous ponctuerons

ponctuerons les i, & les alongerons ainſi j, quand ils ſeront ſeuls ou à la fin, pour les diſtinguer des chifres Romains communs.

Formes ou Caracteres de l'Algebre.

Leurs Noms.	Nombre.	Racine.	Quarré.	Cube.	Quarré de quarré.	1. Sur-ſolide.	Quarré. cube.	2. Sur-ſolide.	Quarré. de quar. de quar.	Cube. de cube.
1. Lettres.	N.	R.	q.	c.	qq.	1. s.	qc.	2. s.	qqq.	cc.&c.
Formes.	o.	j.	ij.	iij.	jv.	v.	vj.	vij.	viij.	jx.&c.
Exemple de Progreſſion double.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.&c.

Il ſe rencontre parmy ces Formes, des nombres de deux manieres; les uns s'appellent abſolus qui ſont indépendans & détachez des Formes, & nous les appellons nombres ſeuls ou nombres ſans Forme; les autres ſont attachez à des Formes & en déterminent le nombre, comme 5 j. 4 ij. & cela veut dire cinq Racines, quatre Quarrez, &c. On les appelle les nombres des Formes.

Outre ces Formes qui repreſentent, comme nous avons dit, les démarches des Progreſſions Geometriques, il y a deux autres marques qui s'appellent Signes de Plus, & de Moins, qui ſervent à repreſenter ce qui s'adjoûte ou ſe ſouſtrait des Formes ou des nombres, & qui ſe figurent ainſi. Signe de Plus, †, ou P. Signe de Moins, —, ou M. Nous ne leur donnerons que le nom de Signes.

Il y a encore d'autres marques pour repreſenter les Racines Secondes, Troiſiémes, ou Quatriémes, &c. c'eſt à dire des Formes d'autre valeur que les premieres, qui ſe figurent ainſi, 2 c'eſt à dire Racine ſeconde; 3, Racine troiſiéme; 4, Racine quatriéme, & ainſi de ſuite en mettant les chifres ordinaires tranchez d'une petite barre. Et nous ne leur donnerons que le nom de Notes. On s'en ſert quand il y a beaucoup de Racines à mettre d'une proportion inconnuë, pour éviter la confuſion qui arriveroit ſi on n'employoit que les premieres.

Enfin comme il y a des nombres qu'on appelle Sourds & Irrationnaux, c'eſt à dire qui n'ont point ce qu'on leur attribuë, il y a auſſi des marques pour les faire connoiſtre, que nous reduiſons à une ſeule qui ſe figure de la ſorte √; & cette figure ſe met

au devant du nombre ou de la Forme irrationnelle, comme √ ij de 6, c'eſt à dire, Racine quarrée de 6, & comme 6 n'a point de racine quarrée, cette figure √ montre qu'elle eſt irrationnelle ou ſourde.

Cecy preſuppoſé, voicy le Texte de la Regle d'Algebre en deux manieres ; la premiere ſimple, la ſeconde plus étenduë & expliquée par des Exemples de preſque tous les cas qui peuvent arriver dans les Queſtions des Nombres.

SIMPLE TEXTE DE LA REGLE D'ALGEBRE, *diviſée en quatre Points.*

I. AU lieu du nombre inconnu que vous cherchez, mettez cette Forme j ; ou s'il y a pluſieurs nombres à chercher mettez-là autant de fois avec ce qu'ils auront de plus ou de moins les uns que les autres. Et quand il y en aura quelqu'un multiple d'un autre, ou double, ou triple, &c. vous mettrez devant la forme j le nombre qui deſignera la quantité de fois qu'il ſera multiple, 2 j s'il eſt double, 3 j s'il eſt triple, &c. La Poſition eſtant faite ſuivant la quantité de nombres inconnus, vous exercerez toutes les conditions de la queſtion qui vous eſt propoſée, c'eſt à dire que s'il faut adjoûter, ou ſouſtraire, ou multiplier, ou diviſer, &c. vous ajoûterez, ou ſouſtrairez, ou multiplierez, &c. juſqu'à ce que vous ayez trouvé une égalité ou équation entre la forme ou les formes poſées avec leurs operations, & les autres membres ou parties connuës de la queſtion propoſée.

II. Vous reduirez cette equation s'il en eſt beſoin, c'eſt à dire que vous déchargerez & rendrez la plus ſimple qu'il ſe pourra la partie qui repreſente les nombres inconnus. Et il ne ſera pas beſoin de faire de Reduction, lorſque la Forme ſera ſeule de ſon côté ſans avoir aucun Signe de Plus ou de Moins ; ou que de l'autre côté oppoſé à l'équation cette Forme ne ſera point repetée. Mais quand l'un ou l'autre arrive, il faut faire la Reduction par la Tranſpoſition ou changement ; en retranchant de part & d'autre ce qu'il y a de Plus, ou ajoûtant de part & d'autre ce qu'il y

a de Moins; ou retranchant la Forme qui se rencontre des deux côtez par la soutractien l'une de l'autre.

III. Puis par le nombre de la Forme j. vous diviserez la partie opposée à laquelle elle a esté trouvée egale. Et le quotient sera le nombre que vous cherchez.

IV. Ou vous en tirerez la Racine, telle que la Forme vous le montrera: & la Racine sera le nombre cherché.

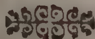
REGLE D'ALGEBRE. expliquée par des Exemples.

PREMIER POINT.

De la Disposition & Equation.

QUand on vous propose un ou plusieurs Nombres inconnus à chercher, mettez cette Forme j. autant de fois separement qu'il y a de nombres à chercher; & neanmoins qnelque nombre qu'il y en ait, le dessein de l'Algebre n'est que de découvrir la valeur de la premiere Racine. Vous les disposerez les unes sur les autres comme on fait en l'Addition & Soustraction de l'Arithmetique ordinaire. Il est à propos de commencer toûjours par le moindre nombre en luy donnant simplement la premiere Forme j. quoy qu'on puisse faire autrement. Or il y a plusieurs Cas qui se rencontrent dans les Questions, & qui font de la diversité en la position des Racines.

I. Quelquefois l'on met simplement plusieurs Racines l'une apres l'autre selon les differens partages de la question, comme en cet Exemple I.



EXEMPLE I.

Question.

Un homme laiſſe par teſtament 3000. liv. & veut que ſon fils ait le double de la mere, & la mere le double de ſes deux filles, qu'elle ſera la part de chacun ?

Mettez
Pour la premiere fille. 1. j.
Pour la ſeconde fille. 1. j.
Pour la mere. 2. j.
Pour le fils. 4. j.

Somme 8. j. égales à 3000. liv.

II. Souvent parmy les Nombres à chercher, il y en a qui ont quelque choſe de plus ou de moins que les autres, & alors on ajoûte, apres la Forme j. les ſignes de Plus ou de Moins, en mettant apres ces Signes les nombres de Plus ou de Moins : Et quelquefois ces Signes ſont pareils comme dans les Exemples II. & III. & quelquefois ces Signes ſont mêlez. Exemple IV.

Exemple II.

Epheſtion a deux ans moins qu'Alexandre, ou Alexandre a deux ans plus qu'Epheſtion.

Clytus a l'âge des deux & quatre ans par deſſus.

Caliſtene ayant quatre-vingt-ſeize ans a l'âge des trois ; quel eſt l'age des trois en particulier ?

Mettez
Pour l'âge d'Epheſtion. 1. j.
Pour Alexandre. 1. j † 2.
Pour Clytus. 2. j † 6.

Nota que ce † 6 ſe rapporte à la premiere racine, car puiſqu'il a quatre ans par deſſus les deux, il en a 6 plus que le premier, outre le double de leur âge.

Somme 4 j † 8. ég. à 96.

Exemple III.

La meſme queſtion en commençant par Clytus.
Pour l'âge de Clytus. 1. j.
Pour Alexandre. $\frac{1}{2}$ j — 1
Pour Epheſtion. $\frac{1}{2}$ j — 3

Somme 2. j — 4. ég. à 96.

Exemple IV.

La meſme queſtion en commençant par Alexandre.
Pour l'âge d'Alexandre. 1. j.
Pour Epheſtion. 1. j — 2.
Pour Clytus. 2. j † 2.

Somme 4. j. ég. à 96.
car — 2 & † 2, ſe détruiſent l'un l'autre.

III. Quelquefois le nombre proposé a des parties ou Fractions, comme des tiers, des quarts, &c. alors il faut mettre aussi en fractions la Forme j.

Exemple V.

Quel est le nombre duquel il reste 10, apres en avoir ôté le tiers & le quart?

Mettez

Pour le Nombre inconnu 1.j. ôtant le tiers & le quart d'un j. qui font $\frac{7}{12}$ de j. il reste $\frac{5}{12}$ de j qui sont égales à 10.

IV. Quelquefois il est necessaire de faire deux operations, & de mettre deux fois separement la mesme Forme.

Exemple VI.

Quel est le Nombre qui estant multiplié par 9, & son produit ajoûté à 90, fait autant que le mesme nombre multiplié par 14?

Mettez

Premierement pour le nombre inconnu 1.j.
& la multipliez par 9, ce sera 9.j.
qui ajoûtées à 90, font 9.j. † 90.

Puis pour la seconde Operation, mettez 1.j.
& la multipliez par 14. ce sera 14.j.
qui seront égales à la premiere Operation, à 9 j † 90.

V. Si dans la question il y a quelque multiplication de nombres à faire ou de Formes, dans lesquelles les Racines deviennent des quarrez ou autres Formes, on marquera ces Formes en mettant les plus grandes les premieres. Ex. VII. Et de mesme quand il y a quelque division à faire. Ex. VIII.

Exemple VII.

Quels sont les deux nombres qui se surpassent de 6, & qui estant multipliez l'un par l'autre produisent 475?

Mettez

Pour le moindre nombre. 1. j
Pour le plus grand. 1. j † 6
Multipliez l'un par l'autre. 1.ij † 6 j. ég. à 475.

Exemple VIII.

Deux Capitaines, dont l'un a 40 Soldats moins que l'autre, ont chacun 1200 écus à diviser à leurs Soldats, le partage estant fait les Soldats de la moindre Compagnie ont chacun 5 écus plus que ceux de la plus grande, combien y a t'il de Soldats en chaque Compagnie?

	Mettez
Pour la moindre Compagnie	1. j.
Pour la plus grande.	1. j † 40.

Comme le nombre des Soldats est octuple de la somme, 40 à 5. il faut multiplier les Soldats l'un par l'autre, & octupler la somme. Les Soldats seront 1. ij † 40° j. égaux à la somme 1200 octuplée 9600.

VI. Enfin il arrive quelquefois qu'en la question proposée il y a des nombres de differente valeur, & dont la proportion ou valeur est incertaine, alors on mettra pour le premier nombre inconnu cette Forme j. Pour le second celle-cy z; Pour le troisiéme 3; Pour le quatriéme 4, &c. pour exprimer ce qu'on appelle Racines Secondes, & lors on exercera la question proposée sur les unes & sur les autres. Ex. IX.

Exemple IX.

Diviser le nombre 24 en trois parties telles que les deux moindres égalent la plus grande, & que les deux plus grandes soient quintuples à la plus petite.

	Mettez
Pour la plus petite.	1. j.
Pour la moyenne.	1. z.
Pour la plus grande.	1. j † 1. z

Par les premieres Racines.

		ou bien.
Pour le petit	1. j.	1. j.
Pour les deux.	5 j.	2. j.
Somme	6. j.	3. 1.
	Somme	6. j.

Si 1. j † 2 z qui sont la somme des deux plus grands nombres, sont quintuples du plus petit 1. j. les 2 z en vaudront quatre premieres, & puis les 2 j, ce seront 6 j égales à 24.

LA Forme j. ayant esté posée autant qu'il est necessaire, vous exercerez sur elle & luy appliquerez toutes les qualitez & conditions de la question proposée, jusqu'à ce que (dit la Regle) vous ayez trouvé une égalité ou équation entre la Forme avec ses operations, & les parties ou membres de la question. C'est à

dire que comme on vous donne en la question ou quelque nombre, ou quelque proportion, ou quelque difference, ou quelque parties de nombre, vous devez supposer que la Forme que vous posez au lieu du nombre inconnu, doit à la fin devenir égale à la partie qui luy est opposée, ce qui s'appelle Equation. Comme dans le premier Exemple, en assemblant les operations de la Forme on a trouvé 8 j, égales à 3000 qui estoit le nombre donné dans la question. Dans le II. Exemple, entre 4 j † 8 & 96. Dans le III. entre 2 j — 4 & 96. Dans le IV. entre 4 j & 96. Dans le V. entre $\frac{5}{12}$ de j & 10. Dans le VI. entre 14 j & 9 j † 90. Dans le VII. entre 1. ij † 6 j & 475. Dans le VIII. entre 1. ij † 40 & 9600. Dans le IX. entre 6 j & 24.

Dans lesquelles operations vous voyez qu'on fait l'Addition ou des simples nombres, ou des nombres des Formes de mesme qu'en l'Addition ordinaire; & quand on assemble les sommes d'especes differentes, on met les plus grandes les premieres, puis apres le signe de Plus, on met les moindres especes comme dans le II. Exemple, 4 j † 8.

De mesme dans la Soutraction de differentes especes, quand les Signes sont les mesmes, on fait la soutraction des nombres en laissant les formes & les signes de Plus ou de Moins tels qu'ils estoient auparavant, mettant les especes en leur ordre.

Comme si de	4 j † 12	& si de	7 ij — 4 j † 7.
on ôte	2 j † 9	on ôte	3 ij — 2 j † 5.
il restera	2 j † 3	il restera	4 ij — 2 j † 2.

Mais lorsque les Signes sont differens on ajoûte les nombres & l'on met le Signe du nombre superieur, c'est à dire de celuy dont il faut soustraire.

Comme si de 5 ij — 3 ij † 7.
on ôte 3 ij † 5 j — 4.
il restera 2 ij — 8 j † 11.

Signa eadem retrahunt; addunt diversaque signa.
Signum, in diversis addens, appone supremi.

Enfin quand le nombre à soustraire est plus grand que celuy dont il le faut soustraire, & qu'ils ont tous deux les mesmes Si-

gnes; alors on fait la ſouſtraction du plus grand nombre, & l'on change les Signes en laiſſant les Formes.

Comme ſi de 9 ij † 4 j — 5
on ôte 4 ij † 7 j — 8.
il reſtera 5 ij — 3 j † 3.

Si ſubducendus ſuperat, mutando, minorem
Subtrahe, mutato Signo, Formâque retenta.

Quant à la multiplication, ſi c'eſt un ſimple nombre qui multiplie le nombre de la Forme, il ne faut multiplier que le nombre & laiſſer la Forme, comme ſi l'on multiplie 4 j par 3, il viendra 12 j.

Accreſcet ſolus numerus, Formâ remanente.

Mais ſi on multiplie des nombres & des Formes par d'autres nombres joints à des Formes, on multipliera les nombres, & on adjoûtera les Formes l'une à l'autre.

Comme 4 ij † 5 j.
par 3 j.
font 12 iij † 15 ij.

Multiplica numeros inter ſe, ac addito Formas.

Ainſi dans le VIII. Exemple, multipliant 1. j. par 1. j. il vient 1. ij. Et à l'égard des Signes dans la multiplication, les meſmes Signes ſont marquez par Plus, les differens par Moins.

Signa eadem, Pluri; diverſa, minore notantur.

La diviſion qui ſe rencontre dans le premier Point ſe fait par les meſmes Regles de la multiplication, c'eſt à dire qu'on diviſe les nombres par les nombres, & qu'on ſouſtrait les Formes l'une de l'autre; & qu'à l'égard des Signes on obſerve la Regle cy-deſſus. *Signa eadem, &c.*

Ces quatre Regles d'Addition, Souſtraction, Multiplication, Diviſion, ſe peuvent icy rencontrer ſelon les conditions & qualitez des queſtions. Il y a une autre Diviſion dont nous parlerons au troiſiéme Point.

SECOND

SECOND POINT.

De la Reduction ou Transposition de l'Equation.

POur le second Point, la Regle ajoûte, vous Reduirez cette Equation s'il en est besoin. Or il n'est pas besoin de reduire l'Equation, c'est à dire d'y rien changer, quand la Forme demeure toute seule de son côté sans y avoir aucun Signe de Plus ny de Moins, ou que de l'autre côté opposé à l'Equation, cette Forme n'est point repetée.

Ainsi dans les Exemples I. IV. V. & IX. il n'est point besoin de Reduction, puisque dans tous ces Exemples il n'y a rien d'ajoûté à la Forme j. & que cette Forme n'est que d'un côté.

Au lieu que dans les Exemples II. III. VI. VII & VIII. la Reduction est necessaire, ou parce que la Forme n'est point seule, comme dans le second, 4 j † 8; dans le troisiéme, 2 j --- 4; dans le septiéme, 1. ij † 6 j. dans le huitiéme, 1. ij † 40: Ou parce que la mesme Forme est repetée ou mise des deux côtez, comme dans le sixiéme Exemple, 14 j sont opposées ou égalées à 9 j † 90. Il est donc necessaire de reduire ces Equations. Ce qui se fait en cette maniere.

Quand la mesme Forme est des deux côtez comme en l'Exemple VI. 14 j & 9 j † 90, il faut soustraire l'une de l'autre avec son nombre, c'est à sçavoir la moindre de la plus grande, & ainsi il ne restera d'un côté que la Forme seule, diminuée par la soustraction de l'autre qui sera ainsi détruite, & de l'autre côté il n'y aura que le nombre seul, auquel la Forme restante sera égalée: comme icy ayant ôté 9 j de 14 j, il restera 5 j égales à 90. Quelquefois le nombre seul est d'un côté avec quelque Forme, mais il faut que cette Forme soit autre & moindre que la Forme qui doit estre seule de son côté, comme nous allons voir dans le VII. Ex. ou l'Equation restera entre 1. ij & 475 --- 6 j.

Quand la Forme majeure n'est que d'un côté, mais qu'apres elle il y a quelque chose de Plus ou de Moins comme dans les Exemples II. III. VII. & VIII. On ôtera de part & d'autre le nombre ou la Forme moindre, qui a le Signe de Plus; ou on a-

joûtera de part & d'autre le nombre ou la Forme moindre qui a le Signe de Moins.

In Signo Pluri, retrahe; in Signo adde Minori.

Ainsi dans le II. Ex. où l'on avoit trouvé l'Equation entre 4 j † 8 & 96; on soutraira 8 de part & d'autre, & l'Equation restera entre 4 j & 88. dans le III. Ex. où l'Equation avoit esté trouvée entre 2 j -- 4 & 96. on ajoûtera 4 de part & d'autre, & l'Equation sera entre 2 j & 100. dans le VII. ou l'Equation estoit entre 1. ij † 6 j, & 475. on ôtera 6 j. de part & d'autre, & il y aura Equation entre 1. ij & 475 --- 6 j. Et de mesme dans le VIII. où l'Equation estoit entre 1. ij † 40 j & 9600. en ôtant 40. j de part & d'autre, l'Equation sera entre 1. ij & 9600 -- 40. j.

Il y a une autre espece de Reduction que nous appellerons Rabaissement, à qui les Auteurs donnent le nom barbare d'hypobibasme, qui se fait pour reduire ou rabaisser les plus grandes Formes à de moindres: & ce Rabaissement est une preparation pour la Division ou pour l'Extraction des Racines. Il se fait par la soutraction des Formes, comme s'il y avoit une Equation entre 10 vj & 90 jv, en ôtant la Forme jv de la Forme vj, l'Equation sera reduite entre 10 ij & 90.

Et parce qu'il est necessaire pour faire l'Extraction de Racine qu'il y ait toûjours un nombre absolu ou sans Forme; quand dans quelque Equation il n'y en aura pas, il ne faudra que faire la soutraction des sommes; comme de 2 ij & 12 j, il restera 2 j & 12.

On reduira aussi le nombre de la Forme majeure à l'unité, & l'on rabaissera tous les autres nombres, en divisant le tout par le nombre de la plus grande Forme.

Ainsi on rabaissera cette Equation, 2 ij & 144 -- 12 j, à celle-cy en divisant le tout par 2, 1. ij & 72 -- 6 j.

TROISIEME POINT.

De la Division requise par la Regle d'Algebre.

LA Reduction estant faite quand il en est besoin, la Regle ordonne la Division pour le troisiéme Point, ou l'Extraction de Racine pour le quatriéme. Or on fait la Division quand la

plus grande Forme de l'Equation est j. & l'Extraction de Racine quand la Forme est plus grande que j, c'est à dire qu'elle est ou ij ou iij, &c.

Pour la Division, il faut prendre le nombre de la Forme, sans avoir aucun égard à la Forme mesme, & par ce nombre diviser l'autre partie de l'Equation, & tout est achevé, c'est à dire à l'égard de l'Algebre, qui ne se met en peine que de découvrir un nombre inconnu sous la Forme j. dont le Quotient de la Division montre la valeur: & par son moyen elle découvre tous les autres, suivant les conditions de la question proposée, comme nous allons voir dans les operations des Exemples cy-dessus où la Division estoit à faire.

Operation du premier Exemple.

L'Equation estant trouvée entre 8 j. & 3000, on divisera 3000 par 8, en laissant la Forme j. & il viendra au quotient 375 qui sera la valeur d'1 j. ou la part d'une des filles, & par ce moyen on aura les parts d'un chacun dans la somme de 3000. liv. suivant la volonté du Testateur.

Pour la premiere fille.	375. liv.	valeur d'1. j.
Pour la seconde fille.	375.	1. j.
Pour la mere.	750.	2. j.
Pour le fils.	1500.	4. j.
	3000. liv.	8. j.

Operation du II. Exemple.

LA Reduction ayant esté faite & l'Equation trouvée entre 4 j & 88, il faut diviser 88 par 4, & il vient pour la valeur de la premiere j, 22 qui est l'âge d'Ephestion, qui donne le moyen de trouver l'âge des autres suivant ce qu'ils ont de plus que luy.

Ans d'Ephestion.	22	valeur d'1. j.
d'Alexandre.	24	1. j † 2.
de Clytus.	50	2. j † 6.
du Pere de Calistene, ou somme	96	4. j † 8. Reduites à 4 j. égales à 96 — 8, ou 88.

Operations du III. & IV. Exemple.

Ans de Clytus.	50.	1.j.
d'Alexandre.	24.	$\frac{1}{2}$j -- 1.
d'Ephestion.	22.	$\frac{1}{2}$j -- 3.
Calisth.	96	2j — 4 Red. à 2j. égales à 100. (50 divisez par 2.

Ans d'Alexandre	24. 1.j.
d'Ephestion.	22. 1.j — 2
de Clytus.	50. 2.j † 2
Calist. ou somme.	96. 4j & 96.
	96 (24.
	4

Operation du V. Exemple.

L'Equation estant entre $\frac{5}{12}$j & 10, à cause de la fraction on les met en mesme dénomination. Ainsi $\frac{10}{1}$ X $\frac{5}{12}$ puis on divise les deux Numerateurs l'un par l'autre, $\frac{120}{5}$) 24. Et ce quotient 24 est le nombre qu'on cherchoit, duquel ôtant le tiers qui est 8, & le quart qui est 6, il reste 10. Ce qui estoit à faire.

$\frac{120 \quad 5}{12}$

Operation du VI. Exemple.

La Reduction de l'Equation ayant esté faite & mise entre 5j & 90. divisant 90 par 5, il vient 18 au quotient, qui est le nombre cherché.
En effet 18. multiplié par 9 fait 162, à quoy adjoûtant 90, c'est 252.
Et le mesme 18 multiplié par 14 produit aussi 252. comme veut la question.
Ainsi 1.j. multiplié par 9 fait 9j, y ajoûtant 90 ce sont 9j † 90.
Puis 1.j. multiplié par 14 fait 14j. égales à 9j † 90. Reduites à 5j & 90. & 90 divisé par 5 donne au quotient 18, nombre cherché.

Operation du IX. Exemple.

Par premieres & secondes Racines.

Pour la moindre partie.	1.j.
Pour la moyenne.	1.2.
Pour la plus grande.	1.j. † 1.2.
Somme	2.j † 2 2. égales à 24.



Par les seules Racines premieres.

Pour la moindre. 1. j.
Pour les deux autres, quintuples. 5. j.

6. j & 24. (4. 8. 12.

4 & 8 égaux à 12.	A 1. j.	A B	
8 & 12 qui font 20.	B 2. j.	3. j	
quintuples à 4.	C 3. j.	B C	quintuples
		5 j.	d'A. 1. j.

6. j. ég. à 24. (4.

Or pour trouver la valeur tant des premiers que des secondes racines, il faut ainsi raisonner par les conditions de la question proposée. Puisque la moyenne & la plus grande qui font 1 j. + 2 z, sont quintuples de la premiere qui n'est qu'1 j. sans doute 2 z en vaudront quatre comme la premiere : joignant ces quatre avec les 2 j, la somme sera en racines premieres 6 j. égales à 24. & divisant 24 par 6, il vient 4 pour la moindre part, & 8, valeur d'1 z pour la moyenne : & 12, valeur d'1 j. & d'1 z. pour la plus grande part. Ainsi toutes les conditions de la question se trouvent dans cette operation : 4 & 8 qui font 12, & qui sont la moindre & la moyenne parties, sont égaux à 12 la plus grande ; & 8 & 12 qui font 20 & qui sont la moyenne & la plus grande parties, sont quintuples de 4 la moindre partie ; enfin 4, 8 & 12 font 24. ce qui estoit requis.

QUATRIE'ME POINT.

Extraction de Racines.

LE quatriéme & dernier Point qui demande l'Extraction de Racine, est le plus difficile. Et neanmoins il sera aisé par cette methode. Apres avoir rabaissé les Formes comme il a esté dit cy-dessus avant le troisiéme Point, & l'Extraction se devant faire quand la Forme est plus grande que j. telle dit la Regle que le montre la Forme, c'est à dire Quarrée, quand la Forme est ij, Cubique quand la Forme est iij, &c. Comme dans le V I. Ex où apres la Reduction il est resté 1. ij. égal à 475 -- 6 j : il faut,

1°. Prendre la moitié du nombre de la Forme j, qui est 6, dans

noſtre Exemple, & cette moitié ſera 3, qu'on reſervera pour la derniere operation.

2°. Il faut quarrer cette moitié, ce ſera 9.

3°. Il faut ajoûter ce quarré au nombre qui ſe trouve ſeul, quand ce nombre a le Signe de Plus, comme en noſtre Exemple; il faut ajoûter 9 à 475. qui eſt entendu avoir le Signe de Plus n'ayant pas celuy de Moins, & ce ſera 484. Si ce nombre eût eu le Signe de Moins, il en eût fallu ſouſtraire le quarré 9. Et quand le quarré eſt plus grand que le nombre ſeul, on ſouſtraira le moindre.

4°. Il faut extraire la Racine quarrée du nombre 484. par l'Extraction de Racine enſeignée dans l'Arithmetique commune, & il viendra 22.

Enfin il faut ſouſtraire de cette Racine trouvée, la moitié du nombre des Racines cy-devant priſe & reſervée, quand ce nombre a le Signe de Moins, comme en noſtre Exemple -- 6 j; & ainſi 3 eſtant ôté de 22, reſte 19 qui eſt la valeur de la Racine ou Forme 1. j. poſée pour le moindre nombre de la queſtion propoſée. Si le nombre des Racines eut eu le Signe de Plus, on eut adjoûté ſa moitié à la Racine extraite, 22. Par ce moyen on a trouvé le moindre nombre de la queſtion, & par luy les autres parties inconnuës de la queſtion, comme il ſe voit par cette

Operation du VII. Exemple.

Où l'on demandoit deux nombres qui ſe ſurpaſſaſſent de 6, & qui eſtant multipliez l'un par l'autre produiſiſſent 475.

CAr ayant trouvé pour la premiere j, le nombre 19 qui eſt le moindre, l'autre qui le paſſera de 6, ſera 25, & ces deux nombres ſe multipliant font 475.

	19	valeur d'1. j.
	25	1. j. † 6.
multipliez	475	1. ij † 6j. égal à 475.
		par Reduction 1. ij & 475 — 6j.

Operations du VIII. Exemple.

AYant ſuppoſé, par la doctrine des proportions, qu'il doit y avoir meſme proportion de la ſomme à diviſer avec le nombre des deux compagnies de ſoldats, multipliez l'un par l'autre, que de la difference de la ſomme avec la difference des ſoldats. Or la difference des ſoldats qui eſt

40, eſt octuplée de la difference de la ſomme qui eſt 5. Il faudra donc multiplier les nombres des ſoldats l'un par l'autre, & octupler le nombre de la ſomme.

Ainſi ayant mis pour le moindre nombre de ſoldats. 1. j.
Et pour le plus grand nombre. 1. j † 40.
Puis multipliant 1. j † 40 par 1. j. il viendra 1. ij † 40 j.

Et comme on ſuppoſe qu'1. ij † 40 j. eſt octuple de la ſomme 1200. pour les égaler il faut octupler 1200. & il viendra 9600. égaux à 1. ij † 40 j. La Reduction eſtant faite, l'Equation ſera entre 1. ij & 9600 — 40 j. dont on extraira la Racine.

Extraction de la Racine Quarrée de 9600--40 j. veu que la Forme eſt 1. ij.

LA moitié du nombre des Racines eſt 20, le quarré de 20 eſt 400, qui eſtant ajoûté à 9600, fait 10000. dont la racine quarrée eſt 100, duquel 100, ôtant la moitié du nombre des Racines qui eſtoit 20, il reſte 80, pour la valeur d'1. j qui eſt le moindre nombre de ſoldats, & par conſequent le plus grand nombre qui paſſe l'autre de 40, ſera 120. Or partageant 1200 à 80, ils auront chacun 15, & partageant 1200 à 120, ils n'auront que 10 chacun, c'eſt à dire 5 moins que les autres. Ce qui eſtoit requis par la queſtion propoſée.

De l'Extraction de deux Racines.

QUand le nombre ſeul ou abſolu, eſt marqué du Signe de Moins, alors il y a deux Racines à extraire. (à moins que ce nombre ne ſoit le quarré de la moitié du nombre des Racines, comme 36 eſt le quarré de 6, qui eſt la moitié de 12, nombre des racines en cet Exemple 1. ij & 12 j -- 36.)

En tout autre cas où le nombre ſeul a le Signe de Moins, il faut extraire deux Racines l'une apres l'autre, comme en cet Exemple, où l'Equation eſtant trouvée entre 1. ij & 18 j -- 72, on extraira deux Racines la grande & la petite. La grande ou premiere par la methode precedente, & la petite ou ſeconde, en ôtant de la premiere Racine déja trouvée, la moitié du nombre des Racines qui avoit eſté pris & reſervé dans la premiere Operation de l'Extraction de la premiere Racine.

Operations du X. Exemple, ayant double Racine.

Extraction de la premiere Racine, d'1.ij & 18 j — 72.

1°. La moitié du nombre des Racines 18 est 9.
2°. Le Quarré de 9 est 81.
3°. — 72 estant ôté de 81, reste 9.
4°. La Racine quarrée de 9 est 3.
5°. † 9 adjoûté à 3, fait 12.

Et 12 est la plus grande Racine quarrée de 18 j — 72. Car 18 j valent 216, si chaque Racine vaut 12, puisque 12 fois 18 fait 216 : & soutrayant — 72 de 216, reste 144, dont 12 est la Racine quarrée.

Extraction de la seconde Racine.

La Racine quarrée cy-devant trouvée en la premiere Operation au quatriéme Point, est 3, Racine de 9, en l'ôtant du nombre des Racines 9, reste 6, qui sera la seconde Racine, dont le quarré sera 36. En effet 18 j valent 108, si la Racine vaut 6, puisque 6 fois 18 font 108 : & soutrayant — 72 de 108, reste 36, dont 6 est la Racine quarrée.

Donc 12 & 6, sont les deux Racines d'1.ij & 18 j — 72.

CONCLUSION.

Voylà en quoy consiste l'Art entier de l'Algebre des Nombres. Car l'Algebre des Nombres Sourds ou Irrationnaux appartient plûtost à la Geometrie qu'à l'Arithmetique, puisqu'à proprement parler les Nombres Sourds ne sont pas des Nombres, mais des grandeurs qu'ils appellent incommensurables.

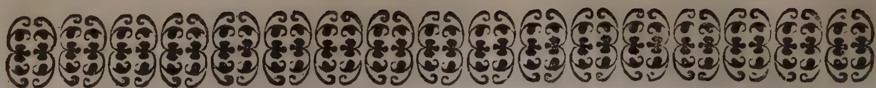
Or toute l'addresse de l'Algebre consiste principalement à bien concevoir & bien poser les questions. Quand on les conçoit bien, il est aisé de les bien poser, & la chose est plus qu'à demy-faite quand la question est bien posée. Il n'y a guere de question qui ne se puisse proposer, & par consequent poser en plusieurs manieres. La position la plus aisée est de mettre toûjours 1. j. pour le moindre nombre de la question, parce que par ce moyen on évite souvent les Fractions : quoy qu'on puisse faire autrement & que mesme il y ait des rencontres où l'on y soit obligé, comme nous l'avons fait en quelques-uns des Exemples cy-dessus.

Il y a aussi beaucoup de questions de l'Algebre qui peuvent se resoudre par l'Arithmetique commune; mais ce qui fait l'avantage

tage de l'Algebre par dessus l'autre Arithmetique, c'est qu'il n'y a icy qu'une Regle pour toutes sortes de questions, au lieu que dans l'Arithmetique commune il faudroit autant de Regles que de Questions, & que l'on n'y va qu'en tatonnant. D'ailleurs l'Algebre ne sert pas seulement comme on le croit, pour resoudre des questions inutiles, mais elle fournit un fonds pour une infinité de Theoremes en toutes les parties des Mathematiques. Elle ouvre l'esprit & luy donne une grande penetration pour les Sciences, l'appprochant en quelque façon de la nature Angelique, lorsqu'elle luy fournit les moyens infaillibles de découvrir des choses cachées que mesme l'esprit humain avec toute son application auroit peine à trouver.

Pour en faciliter la Pratique nous allons donner des Exemples de tous les cas cy-dessus expliquez, & quelques-uns en beaucoup de manieres, afin de sçavoir mieux manier les questions; aprés que nous aurons donné des Maximes generales pour la resolution ou découverte des Nombres inconnus par l'Arithmetique ordinaire.





NOUVELLE ANALYSE DES NOMBRES, OU MAXIMES GENERALLES

Pour découvrir toutes ſortes de Nombres inconnus par le moyen de l'Arithmetique ordinaire, & ſans Algebre.

PREFACE.



QUOY qu'il ſoit vray de dire que toutes les Operations de l'Arithmetique ordinaire, ne tendent qu'à découvrir des Nombres inconnus ; par exemple, que l'Addition découvre la ſomme de deux ou pluſieurs Nombres qui eſtoit auparavant inconnuë ; la Souſtraction leur reſte, la Multiplication leur produit, la Diviſion leur partage, la Regle de Trois, un quatriéme inconnu, & de meſme les Regles de Fauſſe Poſition & ſes compagnes, & l'Extraction des Racines : Neanmoins on a fait cet honneur à l'Algebre de l'appeller l'Art ou la Clef des Nombres cachez. Si cet Art tel qu'il eſt, eſt de l'invention des Arabes ou des derniers Grecs Egyptiens, nous croyons que quand à ſon effet les Anciens le poſſedoient, c'eſt à dire qu'ils avoient une ſi parfaite connoiſſance de la puiſſance des Nombres, que rien ne les arreſtoit, & que par-là ils nous ont fait voir qu'on ſe pouvoit paſſer de ce nouvel Art, qui paroiſt d'autant plus merveilleux, qu'il découvre les Nombres inconnus par une voye toute-à-fait inconnuë. Nous tâcherons de donner icy les principales Maximes qui peuvent ſervir à ce deſſein, apres avoir poſé dans les Livres precedens les Fondemens de la Speculation & puiſſance des Nombres, dont nous ne repeterons icy que les plus neceſſaires.



CHAPITRE I.

Reflexion ſur les differentes valeurs des Nombres.

LA valeur des Nombres ſe conſidere en trois manieres.

La premiere s'appelle valeur de Numeration, où tous les Nombres qui ſe mettent de ſuite ne valent chacun que l'unité qui reçoit ſeulement ſa dénomination du rang où elle ſe trouve. Ainſi 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eſt la meſme choſe que ſi on mettoit de ſuitte, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. comme l'on fait dans le calcul de jettons, où par exemple le quatriéme nombre 4, ne vaut qu'un, placé au quatriéme rang.

La ſeconde, eſt la valeur de Progreſſion ou de Figure, où chaque nombre eſt eſtimé valoir ce que repreſente ſon caractere. Par exemple, ſi l'on met 6 hommes d'un côté & 7 de l'autre, on entend qu'en effet il y en a 6 & 7 qui font 13, c'eſt à dire treize fois un. De meſme quand on dit qu'en la progreſſion naturelle des quatre premiers nombres, 1, 2, 3, 4, font dix, on entend que chaque nombre vaut ce que ſon caractere repreſente, que 2 vaut deux unitéz, que 3 en vaut trois, &c.

La troiſiéme eſt la valeur de Proportion ou de Comparaiſon, dans laquelle on regarde non ſeulement la ſeconde maniere, mais encore on compare ce qu'un nombre a par deſſus un autre, & cette comparaiſon s'appelle Proportion Geometrique: Comme lors qu'on compare ces nombres 1, 2, 3, 4, on dit que le ſecond eſt double du premier, c'eſt à dire qu'il le contient deux fois, que le troiſiéme eſt triple du premier, & qu'il contient le ſecond une fois & ſa moitié; que le quatriéme eſt quadruple du premier, double du ſecond, & qu'il contient le troiſiéme une fois & ſon tiers.

Il y en auroit bien une quatriéme dont ſe ſervent les Muſiciens, que nous avons appellée Numeration Harmonique, & qu'on employe pour conter les jours de la ſemaine, où apres le ſeptiéme nombre les ſuivans juſqu'au quinziéme, & de-là juſqu'au vingt-deuxiéme, & ainſi apres chaque ſeptiéme, les autres ne ſont que la repetition des premiers, & où la valeur n'eſt que la dénomination de la diſtance du premier nombre. Mais comme elle n'eſt d'aucun uſage en Arithmetique, nous ne nous y arreſterons pas. Nous dirons ſeulement en paſſant que c'eſt dans la diſpoſition de ces nombres ou Intervalles que nous avons découvert le Secret admirable de la Compoſition en Muſique à quatre Parties ſur une Baſſe donnée. Ce qui fait voir aſſez qu'en quelque diſpoſition qu'on mette les nombres, ils contiennent des richeſſes infinies.

Souvent on mêle les deux premieres eſpeces de valeur, comme quand on dit que 2 eſt la difference de 5 & 7, & que 5 & 7 font 12. On prend le 2 comme ſi c'eſtoit deux unitez placées entre 5 & 7, qui ſont pris la premiere fois comme eſtant dans le 5 & 7e. rang des unitez, & la ſeconde fois com-

me s'ils avoient chacun autant d'unitez qu'en dénomme leur figure 5 & 7.

Mais quand on dit que 2 est le milieu entre 1 & 3, on n'en détermine point la valeur quoy qu'il semble se devoir plutost prendre en la premiere maniere aussi bien que les deux autres pour chacun une unité, dont 1 est la premiere, 2 la seconde, & 3 la troisiéme.

Souvent aussi on mêle les deux dernieres especes. Comme dans l'Exemple des Nombres des Pythagoriciens que ~~nous~~ avons rapporté en la page 152, quand ils disoient que les changemens arrivoient en 6, 8, 9 & 12 jours, & que ces nombres faisoient 35 jours, ils prenoient alors ces nombres selon la valeur de Progression: & quand ils leur appliquoient les Consonances de la Musique, ils les prenoient selon la valeur de Proportion.

Ces trois sortes de valeurs ont leur usage & leurs regles pour la découverte des nombres inconnus.

CHAPITRE II.

Maximes de Numeration pour la découverte des Nombres inconnus.

Tout nombre est la moitié de la somme des deux nombres qui sont autour de luy en égale distance. Comme 6 est la moitié de 12, que font 5 & 7 | 4 & 8 | 3 & 9 | 2 & 10 | 1 & 11 | qui sont tous de deux en deux également distans de 6.

Ainsi en toute progression Arithmetique où les nombres sont toûjours également éloignez l'un de l'autre, celuy du milieu sera toûjours la moitié de ses deux collateraux, comme 5, 11, 17 | 11 est la moitié de 22, que font 5 & 17 | de mesme 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, &c. Quelque nombre que vous en preniez, il sera la moitié de la somme des deux autres également distans de luy.

Consequence de cette Maxime pour la proportion des quarrez des nombres du milieu, avec la somme des deux Collateraux.

Le premier des nombres qui en a deux autres autour de luy est 2, dont le quarré qui est 4 est égal à la somme de ses collateraux 1 & 3. Le second qui est 3, & qui a deux collateraux de chaque côté qui sont 2 & 4, 1 & 5, qui font 6, a son quarré 9, sesquialtere de leur somme. Le troisiéme 4 a son quarré double de la somme de ses collateraux. Le quatriéme 5 a son quarré double & demy de la somme de ses collateraux. Le cinquiéme 6, l'a triple. Le sixiéme 7, l'a triple & demy. Le septiéme 8, l'a quadruple. Le huitiéme 9, l'a quadruple & demy. Le neufiéme 10, l'a quintuple. Le dixiéme 11, quintuple & demy. L'onziéme 12, sextuple, &c. toujours en augmentant d'un demy. Et l'on trouvera tout d'un coup ces degrez de multiples,

& de multiples ſurparticuliers, en rapportant tous les nombres au nombre 2: ainſi 3 luy eſtant ſeſquialtere, 4 double, 5 double & demy, ils auront leurs quarrez en meſme proportion avec la ſomme de leurs collateraux. Il n'eſt pas neceſſaire de remarquer que comme la ſomme des deux collateraux eſt double du nombre du milieu puiſqu'il n'en eſt que la moitié, les quarrez auſſi doubleront à ſon égard la proportion qu'ils ont avec la ſomme des collateraux. Ainſi l'égale ſera double, la ſeſquialtere triple, la double quadruple, la double & demy, quintuple; la triple, ſextuple &c. Parce qu'en effet tout nombre ſe multipliant luy-meſme pour faire ſon quarré, c'eſt à dire ſe produiſant ou mettant autant de fois qu'il a d'unitez, ſon quarré prendra ſa dénomination de multiple, du rang que le nombre tient dans la progeſſion naturelle des nombres; le quarré de 2 ſera double, celuy de 3 ſera triple, celuy de 4 ſera quadruple &c.

Si donc on demandoit quel eſt le nombre dont le quarré eſt triple de la ſomme des deux nombres, qui ſont également éloignez de luy: On le trouveroit, & tous les autres en quelque proportion que ce ſoit, en rapportant toutes ces proportions au nombre 2. Ainſi le triple de 2 c'eſt 6, dont le quarré 36 eſt triple de 12, dont il eſt la moitié; le quadruple de 2 eſt 8, dont le quarré 64 eſt quadruple de 16, la ſomme des deux nombres également éloignez de 8. Ainſi le quadruple & demy de 2 c'eſt 9, dont le quarré 81 eſt quadruple & demy à 18, double de 9, ainſi à l'infiny. Tellement qu'on peut faire cette Maxime generale: Telle qu'eſt la proportion de la racine d'un quarré avec le nombre 2, telle eſt celle du quarré avec la ſomme des collateraux de ſa racine, c'eſt à dire avec le double de ſa racine. Et conſequemment on peut faire celle-cy: Tout quarré a meſme proportion avec ſa racine, que ſa racine a avec l'unité. Ainſi 5 eſtant quintuple à 1, ſon quarré 25 ſera quintuple à 5. Par ces degrez nous ſommes deſcendus à la reſolution du principe des quarrez, qui en effet ne ſont les quarrez d'un nombre que parce que ce nombre s'eſt multiplié autant de fois qu'il a en luy d'unitez, & ce nombre qui eſt la racine de ce quarré, n'a tant & tant d'unitez qu'autant qu'il eſt éloigné de l'unité premiere qui eſt la racine de tous les nombres. Nous pourrons tirer d'autres Conſequences de cette Maxime en parlant des quarrez.

II. La difference de deux nombres eſtant partagée en deux moitiez égales, & l'une de ces moitiez eſtant ou adjoûtée au moindre nombre, ou ſouſtraite du plus grand, eſt la moitié de leur ſomme: comme la difference entre 6 & 10 qui eſt 4, eſtant partagée en 2 & en 2; & 2 eſtant ajoûté à 6, on ſouſtrait de 10, fait 8 qui eſt la moitié de 16, la ſomme de 6 & de 10. Ainſi la difference de 6 & de 9, qui eſt 3 eſtant partagée en $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$, & l'une des deux moitiez adjoûtée à 6 ou ſouſtraire de 9, fait 7 & $\frac{1}{2}$ la moitié de 15 leur ſomme.

III. La difference de deux nombres eſtant adjoûtée à leur ſomme, fait e double du plus grand, eſtant ſouſtraite elle fait le double du moindre: comme la difference entre 5 & 7, qui eſt 2, eſtant adjoûtée à leur ſomme

qui eſt 12, fait 14 double de 7, & eſtant ſouſtraite laiſſe 10 double de 5.

On peut faire une infinité de queſtions ſur cette Maxime, & qui ſont faciles à reſoudre par ſon moyen. Par exemple, ſi on demande quel eſt l'âge en particulier de deux hommes, dont l'un à 40 ans plus que l'autre, & qui tous deux ont 100 années. On aura les années du plus âgé en adjoûtant 40 à 100 qui font 140, & prenant la moitié qui eſt 70, & on aura l'âge du plus jeune en retranchant 40 de 100, & il reſtera 60 dont la moitié eſt 30, & 30 & 70 font 100.

Mais en ces queſtions il ne ſuffit pas de dire la difference des deux nombres il en faut encore dire la ſomme, parce que par exemple, 40 peut eſtre la difference d'une infinité de nombres depuis 1 & 41, juſqu'à l'infiny.

IV. La ſomme de deux nombres eſtant partagées en deux moitiez égales & leur difference auſſi, ſi l'on adjoûte la moitié de la difference à la moitié de la ſomme, on aura le plus grand nombre: Et ſi l'on retranche la moitié de la difference de la moitié de la ſomme, on aura le moindre nombre.

Cette Maxime ſert à reſoudre toutes les queſtions de la precedente; ſi par exemple on partage 100 en 50 & 50, & 40 en 20 & 20, & qu'on ajoûte 20 à 50, on aura 70 pour le plus grand nombre, & ſi l'on retranche 20 de 50, il reſtera 30 pour le moindre.

V. La difference de deux nombres multipliant leur ſomme, produit la difference de leurs deux quarrez, comme 3 qui eſt la difference de 2 à 5, multipliant leur ſomme qui eſt 7, fait 21, qui eſt la difference de 4 à 25, les deux quarrez de 2 & de 5. Ainſi 3, difference de 6 & de 9, multipliant leur ſomme 15, fait 45, qui eſt la difference de 36 à 81, quarrez de 6 & de 9.

VI. Si deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, le produit de cette multiplication ſera en meſme proportion avec le quarré du moindre des deux nombres, que les deux nombres avoient avant leur multiplication: ſoit que ces deux nombres fuſſent pris à plaiſir, ſoit qu'ils fuſſent le partage d'un autre nombre. Comme ſi 100 eſtant partagé en 20 & 80 qui ſont en proportion quadruple, ces deux nombres ſe multipliant l'un l'autre produiront 1600, qui eſt auſſi en proportion quadruple avec 400, le quarré de 20. Cette Maxime qui eſt plutoſt de Proportion que de Numeration, s'exprime encore en ces termes.

Tout nombre plan eſt avec le quarré du moindre de ſes côtez, en meſme proportion que ſes deux côtez; comme le plan de 4 par 5, qui eſt 20 a la meſme proportion avec 16, quarré de 4, que 4 & 5.

VII. Tout nombre eſtant diviſé en tant de parties que l'on veut, a ſon quarré egal, tant aux quarrez de toutes ſes parties, qu'aux doubles de tous les plans de chaque partie. Ainſi ſi l'on diviſe 9 en 2, 3 & 4, ou en 4 & 5, ou en 3 & 6, ſon quarré 81 ſera egal aux quarrez de 2, 3 & 4, ſçavoir 4, 9 & 16 qui font 29, & aux doubles des plans de 2 par 3, de 3 par 4, & de 2 par 4, ſçavoir 12, 24 & 16, qui font 52, qui avec 29, font 81: Ou aux deux quarrez de 4 & de 5, 16 & 25 qui font 41, & au double de leur plan qui fait

40, & avec 41, 81 :. Ou aux quarrez de 3 & de 6, qui font 45; & au double de leur plan 36, qui fait 81.

VIII. La difference de deux nombres quarrez est égale au quarré de la difference de leurs racines, & au double de la multiplication de la moindre racine par la difference des deux racines. Comme la difference des deux quarrez de 3 & 5, qui sont 9 & 25, qui est 16, est égale tant au quarré de la difference des deux racines 3 & 5, sçavoir 2 dont le quarré est 4, & au double de la multiplication de 3 par 2, sçavoir 12, qui avec 4 fait 16.

IX. Les differences ou excez de deux ou plusieurs nombres inconnus estant retranchez de leur somme donnée, & le reste estant divisé par la quantité des nombres inconnus; par 2 s'il ny en a que 2, par 3 s'il y en a 3, &c. le quotient sera le moindre nombre, & il sera aisé de trouver les autres en ajoûtant ou retranchant les excez ou differences que les uns ont sur les autres. Où vous remarquerez que lors qu'un des nombres a le double ou le triple d'un autre, &c. on le doit conter pour faire la division, ou pour 2, ou pour 3, &c. Et les excez ou differences se doivent toûjours prendre par rapport au moindre nombre.

Cette neufiéme Maxime est la principale pour la découverte des nombres, & c'est d'elle qu'est tirée la Regle d'Algebre pour les simples nombres, dont les sommes & les differences sont données, quoyque les nombres soient inconnus. Nous en ferons donc une Regle generale.

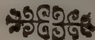
CHAPITRE III.

Regle pour resoudre les Questions, où la somme & les differences de deux ou plusieurs nombres sont donnez.

1o. IL faut retrancher de la somme donnée les differences ou excez donnez.

2o. Il faut diviser le reste par la quantité des nombres inconnus, en contant celuy qui auroit le double, ou le triple, ou le quadruple &c. du premier, pour deux ou pour trois ou pour quatre, &c. & celuy qui auroit le double du second, ou le triple ou le quadruple, &c. pour quatre, ou pour six, ou pour huit, &c. à l'égard du premier, & le quotient qui viendra sera le moindre nombre inconnu.

3o. Apres avoir égalé à ce premier nombre, le second, en luy adjoûtant ce qu'il aura de plus; on égalera à ce second le troisiéme, & ainsi de suite en ajoûtant ce qu'ils ont de plus les uns que les autres.



I. Exemple de deux nombres inconnus à trouver, dont la somme est donnée & leur difference.

LEs âges de deux hommes font 100 années, l'un en a 40 plus que l'autre, combien en ont-ils chacun?

Nous avons déja donné trois moyens pour resoudre ces sortes de questions, ou en retranchant de la somme donnée la difference donnée, & prenant la moitié du reste pour le moindre nombre, sur lequel il est aisé de trouver le plus grand en luy adjoûtant la difference, comme icy apres avoir ôté 40 de 100, il reste 60, dont la moitié est 30 pour le moindre nombre, auquel ajoûtant 40 la difference, on aura 70 pour le plus grand.

Ou en ajoûtant la difference à la somme donnée, & divisant le tout en deux, on aura le plus grand nombre en la moitié, sur lequel il sera aisé d'avoir le moindre en retranchant la difference, comme icy 40 adjoûté à 100 fait 140 dont la moitié est 70 pour le plus grand nombre, d'où retranchant 40 la difference, on aura 30 pour le moindre.

Ou enfin en retranchant la moitié de la somme & la moitié de la difference, & ajoûtant ou retranchant la moitié de la difference à la moitié de la somme, comme icy adjoûtant 20 à 50, l'on aura 70 & le retranchant on aura 30. Mais nous ne nous arresterons icy qu'à la premiere pour estre la plus aisée & plus generale.

II. Exemple.

LEs âges de deux hommes font 100 années: l'un en a quatre fois plus que l'autre, combien en ont ils chacun? il faut diviser 100 par 5, il vient 20 pour le plus jeune, & 80 pour le plus âgé.

EXEMPLES.

De trois nombres inconnus à trouver, dont la somme & les differences sont données.

I. Exemple.

LE Pere de Calisthene à 96 ans; qui est l'âge d'Ephestion, d'Alexandre, & de Clytus. Alexandre a 2 ans plus qu'Ephestion: Clytus a les années d'Ephestion & d'Alexandre, & 4 par dessus, quelles sont les années d'un chacun?

1°. Les differences ou excez qui sont 8, parce que Alexandre en a 2 plus qu'Ephestion, & Clytus qui en a 4 plus que les deux autres, en a 6 plus que le premier, qui avec 2 font 8, estant retranchez de la somme 96, il reste 88. 2°. 88 estant divisé par la quantité des nombres inconnus, qui sont icy 4, quoy qu'il n'y en ait que trois nommez, parce que Clytus en a 2 puisqu'il a autant que les deux autres, il vient au quotient 22 pour l'âge d'Ephestion. 3°. En égalant Alexandre à 22, & luy donnant ce qu'il a de plus, il aura 24 ans: Et Clytus ayant autant que les deux autres qui en ont

ont 46, & 4 par dessus il en a 50, & ces trois âges font 96 qui est l'âge du pere de Calistene.

Autre Exemple.

TRois hommes ont 100 écus, le second en a 20 plus que le premier, le troisiéme en a 24 plusque le second : combien en ont-ils chacun ?

La somme des excez 20 & 44 (parceque le troisiéme qui en a 24 plus que le second, est supposé en avoir 20 autant que le second) qui font 64 estant retirée de 100 laisse 36 qu'il faut diviser par 3 le nombre des nombres inconnus, & il vient 12 pour le moindre nombre, 32 pour le second, & 56 pour le troisiéme, lesquels nombres, 12, 32, & 56, font la somme 100.

EXEMPLES.

De quatre nombres inconnus, dont la somme est donnée & les differences.

Exemple I.

QUatre hommes ont partagé entre eux 300 écus ; le premier en a pris peu ; le second en a pris 25 plus que luy, le troisiéme en prend 75 plus que le second, & enfin le quatriéme en prend 15 plus que le troisiéme, & il ne reste rien : Combien en avoit pris le premier, & combien les trois autres en ont-ils chacun ?

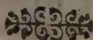
L'excez du second 25, du troisiéme qui a 100, (car 25 & 75 font 100) & l'excez du quatriéme 115, qui font 240, estant retirez de la somme 300, laissent 60, qui estant divisé par 4 le nombre des personnes ou nombres inconnus donne 15 pour la part du premier, & consequemment 40 pour le second, 115 pour le troisiéme, & 130 pour le quatriéme, & toutes ces sommes, 15, 40, 115, 130, font 300.

Autre Exemple.

SUr la somme de 100 livres, le second en a 10 plus que le premier, le troisiéme en a 16 plus que le second, & le quatriéme en a 8 plusque le troisiéme, combien en ont-ils chacun.

Les excez 10, 26 & 34 qui font 70, estant retranchez de 100 laissent 30, qui estant divisé par 4, donne $7\frac{1}{2}$ pour le premier, & par consequent $17\frac{1}{2}$ pour le second, 33 & $\frac{1}{2}$ pour le troisiéme, & 41 & $\frac{1}{2}$ pour le quatriéme. Et ces sommes $7\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, $33\frac{1}{2}$, $41\frac{1}{2}$, font la somme de 100.

Ainsi de tous les autres cas où les sommes & les differences seront données entre tant de nombres qu'on voudra.



CHAPITRE IV.

Trouver la ſomme totale inconnuë de pluſieurs nombres joins differemment, & ſeparez d'un ſeul, par les excez donnez de pluſieurs ſur un ſeul.

SI l'on propoſe une certaine quantité de nombres inconnus, ou 3, ou 4, ou 5, ou tant qu'on voudra, & qu'au lieu d'en donner la ſomme totale comme dans les exemples precedens, on donne ſeulement les excez de deux nombres ſur un troiſiéme quand il y en a 3, de 3 ſur un quatriéme quand il y en a 4, de 4 ſur un cinquiéme quand il y en a 5, &c. en ſorte qu'on les accouple ou joigne differemment; par exemple quand il y en a 3, on joint les deux premiers enſemble, puis le premier & le troiſiéme, & enfin les deux derniers, en diſant ſeulement ce que les deux qui ſont joins enſemble ont par deſſus l'autre: Et quand il y en a 4, on joint d'abord les 3 premiers; puis le premier, 2 & 4; puis le premier, 3 & 4, & enfin les trois derniers, & ainſi quand il y en a davantage, on en ſepare toûjours un ſeul de la compagnie des autres, & l'on dit ce que les autres aſſemblez ont par deſſus luy: Alors il ſera facile de découvrir ces nombres quand on ſçaura quel rapport aura la ſomme totale des excez donnez avec la ſomme inconnuë des nombres. En voicy les rapports en toutes les quantitez de nombres poſſibles.

En 3 nombres la ſomme des 3 excez donnez eſt égale à la ſomme totale des trois nombres inconnus. Nous en donnerons incontinement les exemples.

En 4 nombres la ſomme des excez donnez eſt double de la ſomme des nombres inconnus.

En 5 nombres la ſomme des excez eſt triple de celle des nombres.

En 6 nombres, elle eſt quadruple.

En 7 elle eſt quintuple. Et ainſi à l'infiny la ſomme des excez eſt dans un rang de multiple deux degrez au deſſous de la quantité des nombres.

En 8 elle eſt ſextuple. En 10 octuple, &c.

Cela ſuppoſé voicy la Regle Generale pour découvrir les nombres inconnus par la ſomme des excez donnez.

1°. Il faut aſſembler les excez donnez en une ſomme.

2°. Il faut reduire cette ſomme à l'égalité de la ſomme des nombres inconnus, ſuivant les ſuppoſitions precedentes.

3°. Il faut enſuite retrancher de cette ſomme reduite chaque excez l'un apres l'autre, en faiſant autant d'operations qu'il y aura de nombres inconnus & d'excez donnez: apres ce retranchement la moitié du reſte de la ſomme ſera toûjours un des nombres qu'on cherche: Et le plus petit excez retranché donnera le plus grand nombre inconnu, comme au contraire le plus grand excez donnera le plus petit nombre,

EXEMPLES.

En trois nombres, où la somme des excez donnez est egale à la somme des nombres inconnus.

TRois hommes ont une somme d'écus : le premier & le second en ont

	Ex. I.	Ex. II.
plus que le troisiéme,	40	ou 82
Le premier & troisiéme en ont plus que le second,	20	ou 400
Le second & troisiéme en ont plus que le premier,	10	ou 566
Combien en ont-ils chacun?		
1°. La somme des excez est,	70	ou 1048

2°. Puisque dans trois nombres la somme des excez est égale à celle des nombres, il n'y a point de reduction à faire.

Premiere Operation.

3°. Otant le premier excez 40 de la somme 70, il reste 30 dont la moitié est 15 pour le moindre nombre.

Ou retranchant 82 de 1048 il reste 966 dont la moitié est 483 pour le plus grand nombre.

Seconde Operation.

Otant 20 de 70 il reste 50, dont la moitié est 25 pour le second nombre.

Ou retranchant 400 de 1048 il reste 648 dont la moitié est 324 pour le second.

Troisiéme Operation.

Otant 10 de 70, il reste 60 dont la moitié est 30 pour le plus grand nombre.

Ou retranchant 566 de 1048 il reste 482, dont la moitié est 241 pour le moindre nombre.

Ainsi les trois nombres inconnus estoient 30, 25, 15 | ou 241, 324, 483.

Et la somme de ces nombres se trouve egale à celle des excez 70 | ou 1048.

Où vous remarquerez que les nombres inconnus viennent par un ordre renversé, le dernier vient le premier, & le premier le dernier.



EXEMPLES.

En quatre nombres, où la somme des excez donnez est double de la somme des nombres inconnus.

QUatre hommes sont nez en differens temps, ou bien ont differentes sommes d'écus, estant accouplez avec d'autres; combien en ont-ils chacun.

	Ex. I.	Ex. II.
Le premier, second & 3e. ont ensemble plus que le 4e.	40 ans.	ou 36 écus.
Le premier, second & 4e. ont ensemble plus que le 3e.	80	ou 22
Le premier 3e. & 4e. en ont plus que le second,	120	ou 16.
Enfin le second, 3e. & 4e. en ont plus que le premier,	160	ou 14.
1°. La somme des excez est	400	ou 88.
2°. Parce qu'elle est double de la somme des nombres, il la faut reduire à la moitié.	200	ou 44.

Premiere Operation.

3°. 40 ôté de 200, il reste 160 dont la moitié est 80 pour le quatriéme.
Ou 36 ôté de 44, il reste 8 dont la moitié est 4 pour le quatriéme.

Seconde Operation.

80 ôté de 200 laisse 120, dont la moitié est 60 pour le troisiéme.
Ou 22 ôté de 44 laisse 22, dont la moitié est 11 pour le troisiéme.

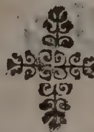
Troisiéme Operation.

120 ôté de 200 laisse 80, dont la moitié est 40 pour le second.
Ou 16 ôté de 44 il reste 8, dont la moitié est 4 pour le second.

Quatriéme Operation.

160 ôté de 200 reste 40 dont la moitié est 20 pour le premier.
Ou 14 ôté de 44 reste 30 dont la moitié est 15 pour le premier.
Ainsi les 4 nombres inconnus estoient 20, 40, 60, 80, dont la somme est 200, moitié de 400.
Ou 15, 14, 11, 4, dont la somme est 44, moitié de celle des excez 88.

Et il est aisé de voir dans ces exemples comme aussi dans les precedens, qu'en effet les excez de plusieurs sur un des nombres, estoient tels & tels,



EXEMPLE.

En cinq nombres, où la somme des excez donnez est triple de la somme des nombres inconnus.

Les quatre premiers en ont plus que le cinquiéme. 10
Le premier, second, troisiéme, & cinquiéme surpassent le 4e de 14
Le premier, second, quatriéme, & cinquiéme, surpassent le 3e. de 18
Le premier, troisiéme, quatriéme, & 5e. surpassent le second de 22
Enfin les quatre derniers surpassent le premier de 26

La somme des excez est 90. R. à 30.

1ere. Oper. 30 / 10 reste 20 dont la moitié est 10 pour le cinquiéme.

2e. Oper. 30 / 14 reste 16 dont la moitié est 8 pour le quatriéme.

3e. Oper. 30 / 18 reste 12 dont la moitié est 6 pour le troisiéme.

4e. Oper. 30 / 22 reste 8 dont la moitié est 4 pour le second.

5e. Oper. 30 / 26 reste 4 dont la moitié est 2 pour le premier.

Ainsi les nombres inconnus sont 2, 4, 6, 8, 10, dont la somme est 30 soustriple de 90 celle des excez.

EXEMPLE.

En six nombres où la somme des excez est quadruple.

Premier excez 18. | second excez 22. | troisiéme excez 26. | quatriéme excez 30. | cinquiéme excez 34. | sixiéme excez 38. |

Somme des excez 168, dont le quart est 42 pour la somme des nombres inconnus.

1ere. Oper. 42 reste 24. / 18 moitié 12. | 2e. Oper. 42 reste 20. / 22 moitié 10. | 3e. Op. 42 reste 16. / 26 moitié 8.

4e. Op. 42 reste 12. / 30 moitié 6. | 5e. Oper. 42 reste 8. / 34 moitié 4. | 6e. Op. 42 reste 4. / 38 moitié 2.

Ainsi les six nombres inconnus sont 2, 4, 6, 8, 10, 12, dont la somme est 42.



EXEMPLE.

En ſept nombres, où la ſomme des excez eſt quintuple.

Nombres inconnus,	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14.	
Excez,	28	32	36	40	44	48,	52	Sõme 280 R. à 56.
Operations, ſommes,	56	56	56	56	56	56	56	
Excez	52	48	44	40	36	32	28	
Reſte	4	8	12	16	20	24	28	
Moitiez ou nombres inconnus.	2	4	6	8	10	12	14	Somme 56.

Ainſi de tous les autres nombres dont les excez ſeront donnez.

Remarquez que s'il arrivoit qu'au lieu d'excez il y eût du moins, alors on feroit trois choſes. 1°. Apres la reduction de la ſomme des excez à l'égalité de la ſomme des nombres inconnus, on retrancheroit le moins de la ſomme totale des excez. 2°. On le retabliroit dans l'operation où ce moins ſe rencontreroit; c'eſt à dire qu'on l'adjoûteroit à la ſomme totale des excez, de meſme que ſi c'eſtoit un veritable excez pour cet égard ſeulement. 3°. Apres l'avoir ajoûté on ne feroit pas de retranchement en cette operation, mais on prendroit la moitié de la ſomme augmentée de ce moins pour un des nombres inconnus, comme ſi on la prenoit de la moitié du reſte de la ſouſtraction qui ſe fait de chaque excez de la ſomme des excez reduits.

Exemples où il ſe rencontre du moins parmy les excez, en trois nombres.

SI on demande quels ſont les trois nombres, dont les deux premiers ſont ſurpaſſez de deux par le troiſiéme, ou, ce qui eſt la meſme choſe, ont deux moins que le troiſiéme, & dont le premier & troiſiéme ont ſix plus que le ſecond: & enfin dont le ſecond & troiſiéme ont 14 plus que le premier.

La ſomme des excez eſt 20 moins 2, c'eſt à dire 18, & comme il n'y a que trois nombres inconnus, la ſomme des excez eſt égale à celle des nombres inconnus, & ainſi il n'y a point de reduction à faire.

Comme c'eſt dans la premiere operation que ſe rencontre ce moins 2, au lieu de le retrancher de la ſomme 18 dont il a déja eſté retranché, on le remet & il y a 20, dont on prend la moitié 10 pour le troiſiéme nombre inconnu. Puis à la ſeconde operation on retranche l'excez 6 de 18, & il reſte 12 dont la moitié eſt 6 pour le ſecond nombre: & enfin on retranche de 18 le troiſiéme excez 14, & il reſte 4 dont la moitié eſt 2 pour le premier nombre inconnu.

Ainſi les trois nombres inconnus ſont 2, 6, 10, dont la ſomme eſt 18, & dont les deux premiers aſſemblez ont 2 moins que le troiſiéme, &c.

En quatre nombres.

Le premier excez eſt moins 4
Le ſecond excez eſt 16
Le troiſiéme excez eſt 20
Le quatriéme excez eſt 24

Somme des excez eſt 64 R. à 32 — 4 ou 28.

Premiere operation, il faut ajoûter moins 4 à 28 & l'on aura 32, dont la moitié eſt 16 pour le quatriéme nombre inconnu.

Seconde oper. 28 reſte 12
16 moitié 6 pour le troiſiéme.

Troiſiéme oper. 28 reſte 8
20 moitié 4 pour le ſecond.

Quatriéme oper. 28 reſte 4
24 moitié 2 pour le premier nombre inconnu.

Ainſi les quatre nombres inconnus ſont 2, 4, 6, 16, dont la ſomme eſt 28, & dont les trois premiers 2, 4, 6, ont 4 moins que le quatriéme, &c.

Suitte de cette Maxime en d'autre Cas.

QUand la ſomme d'un des nombres eſt donnée ſeparement, & que les excez ou differences des autres nombres inconnus ne ſont ſpecifiées que par rapport à cette ſomme donnée, & aux autres nombres inconnus: Alors il faut d'abord faire deſcendre d'un degré quant à la valeur, & monter d'un degré quant à la dénomination les ſommes inconnuës, par exemple de la moitié au tiers, du tiers au quart, du quart au quint, &c. Puis chercher un nombre qui contienne preciſement les parties ainſi diminuées quant à la valeur ou augmentées quant à la dénomination; duquel nombre les parties ôtées, il reſte le nombre premierement donné. Or ce nombre ſe cherche par la ſimple Regle de Faux enſeignée dans le cinquiéme Livre de l'Arithmetique, & que nous donnerons cy-apres dans les Maximes de Proportion.

Exemple I.

UN Teſtateur legue ſon argent à trois perſonnes ſans en ſpecifier la ſomme, il donne à Pierre 10000. liv. il veut que Jacques ait la moitié de Pierre & de Jean, & que Jean ait le tiers de Pierre & de Jacques, qu'elle eſt la ſomme totale, & la part de Jacques & de Jean? Ayant reduit la moitié au tiers, le tiers au quart, je cherche quel eſt le nombre d'où ayant retiré le tiers & le quart il reſte 10000. & je trouve que c'eſt 24000. dont le tiers eſt 8000 pour Jacques, & le quart eſt 6000 pour Jean. Ainſi Jacques

a la moitié de Pierre & de Jean, qui ont ensemble 16000. liv. & Jean a le tiers de Pierre & de Jacques, qui ont ensemble 18000. liv.

Exemple II.

PAul, André & Simon, ont partagé une somme d'argent: Paul a eu 25 écus pour sa part, André en a eu la moitié de Paul & de Simon; Simon en a eu le tiers de Paul & d'André, qu'elle estoit la somme totale, & les parts d'André & de Simon. La Reduction estant faite de la moitié au tiers, & du tiers au quart; & 60 estant le nombre duquel ôtant le tiers & le quart il reste 25, André aura 20, & Simon 15. Ainsi 25 & 15, qui font 40, font le double de 20, la part d'André: & 25 & 20 qui font 45 sont le triple de 15, la part de Simon. Si Paul en avoit eu 30, la somme totale auroit esté 72, & la part d'André auroit esté 24, & celle de Simon 18.

Exemple III.

UN Grand Roy apres sa campagne achevée à la fin d'Avril, divise son armée en trois corps, qu'il destine contre trois sortes d'ennemis, il envoye contre les premiers une armée de 76000 hommes, contre les seconds le quart de toutes ses troupes, & contre les troisiémes la cinquiéme partie; quel est le nombre entier de ses troupes, & en particulier des deux corps destinez contre les seconds & troisiémes? Apres avoir reduit le quart au quint & le quint au sixiéme, on trouve 120000 hommes en toutes les trois armées; sçavoir 76000 dans la premiere, & 24000 dans la seconde, & 20000 dans la troisiéme.

Exemple IV.

LEs Apôtres ayant pesché d'un coup de filet une quantité de poissons apres la Resurrection de Nostre-Seigneur, supposant qu'ils les partagerent; Pierre en prit pour luy 33, le reste fut ainsi partagé entre les dix autres, de deux en deux. Jean & Jacques en eurent 40 pour eux, chacun 20. André & Philippe eurent le tiers de la somme des huit autres: Thomas & Barthelemy en eurent le quart: Mathieu & Jacob en eurent le quint: Simon & Jude n'en avoient que le dix-neuviéme; mais Pierre leur en donna six des siens, & Pierre n'en eut plus que 27, quelle fut la quantité des poissons, & quelle la part d'un chacun des dix autres Apôtres? Apres la reduction du tiers au quart, du quart au quint, &c. le nombre d'où ayant retranché le quart, le quint, le sixiéme & le vingtiéme, il reste 40, est 120, dont le vingtiéme est 6, le sixiéme est 20, le cinquiéme est 24, & le quart est 30, qui font 80, & avec 40 le nombre de 120. Ainsi Jean & Jacques en eurent chacun 20, les deux suivans chacun 15, les deux autres chacun 10, & les derniers qui n'en avoient chacun que 3 en eurent 6 chacun, & tout cela faisoit la somme de 126, qui avec les 27 de Pierre font 153, qui fut le nombre des poissons peschez & partagez.

CHAPI-

CHAPITRE V.

De la Progreſſion, en tant qu'elle peut ſervir à la découverte des Nombres inconnus.

ENcore que les Progreſſions ſoient des Proportions parce qu'elles continuent toûjours dans le meſme rapport qu'elles ont commencé : neanmoins quant à la valeur elles ſont differentes les unes des autres, c'eſt pourquoy nous en traiterons ſéparément.

Il y a deux ſortes principales de Progreſſions continuës, car c'eſt de celles-là que nous pretendons parler non pas des interrompuës ; la Progreſſion Arithmetique qu'on appelle naturelle où les nombres ſont également diſtans les uns des autres, ſoit de l'unité comme 1, 2, 3, &c. ſoit du binaire, comme 1, 3, 5, 7, &c. ou 2, 4, 6, 8, &c. ſoit du ternaire comme 3, 6, 9, 12, &c. & la Progreſſion Geometrique qui garde toûjours les meſmes raiſons, c'eſt à dire, où le ſecond eſt contenu autant de fois dans le troiſiéme qu'il contient le premier, & ce troiſiéme dans le quatriéme qu'il contient le ſecond, &c. comme 1, 2, 4, 8, &c.

CHAPITRE VI.

De la Progreſſion Arithmetique.

LEs Progreſſions Arithmetiques ſont ou entieres ou partielles.

Les entieres ſont celles qui continuent ſans interruption tant qu'on veut, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

ou 2, 4, 6, 8, 10, 12, &c.

Les partielles s'arreſtent à chaque nombre de leur dénomination ;

La Binaire de deux en deux. 1, 2, | 3, 4, | 5, 6, | 7, 8, | &c.

La Ternaire de trois en trois. 1, 2, 3, | 4, 5, 6, | 7, 8, 9, | 10, 11, 12, | &c.

La Quaternaire de quatre en quatre. 1, 2, 3, 4 | 5, 6, 7, 8 | 9, 10, 11, 12 | &c.

Ainſi des autres.

Remarquez que les Progreſſions partielles finiſſent toutes apres la premiere par un terme qui eſt toûjours multiple du dénominateur de la progreſſion, que le dernier du ſecond rang eſt double du dernier du premier rang, que le dernier du troiſiéme en eſt triple, du quatriéme en eſt quadruple, &c.

Et par conſequent le dernier du ſecond eſt en proportion double avec le dernier du premier, le troiſiéme avec le ſecond en proportion ſeſquialtere, & le quatriéme avec le troiſiéme en proportion ſeſquitierce, & ainſi toûjours en diminuant, ce qui paroiſt à la ſeule inſpection de ces progreſſions.

On peut encore inventer d'autres Progreſſions, qui peuvent avoir leur uſage pour la découverte des nombres, comme ſont celles qu'on appelle de repetition, & qui ſont encore partielles ; parce qu'elles repetent toûjours le nombre où elles ont finy le rang precedent,

comme 1, 2, 3 | 3, 4, 5 | 5, 6, 7 | 7, 8, 9 | &c.

ou bien en nombres pairs, 2, 3, 4 | 4, 5, 6 | 6, 7, 8 | 8, 9, 10 | &c.

On en peut encore prendre de multiples de toutes manieres, c'eſt à dire dont le dernier terme eſt au premier, ou double, ou triple, ou quadruple, &c. comme nous avons fait en noſtre Arithmetique Harmonique à l'égard des progreſſions doubles, où mettant de ſuitte les progreſſions partielles de tous les nombres doubles, en obmettant comme nous avons fait là les nombres qui ne ſont pas meſurez, ou qui ne naiſſent pas de la multiplication mutuelle des ſix premiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous avons trouvé qu'il ſembloit que la nature eut diſpoſé les nombres pour la Muſique, ou qu'elle eut tiré la Muſique de la diſpoſition naturelle des nombres. Il n'eſt pas beſoin de la remettre icy puiſque nous en avons fait là tout l'uſage qui s'en pouvoit faire.

CHAPITRE VII.

Des Progreſſions Geometriques.

Les Progreſſions Geometriques prennent leur nom du premier nombre qui ſe met apres l'unité & continuë de meſme. Si par exemple on met 2, on l'appelle progreſſion double, c'eſt à dire que tous les nombres qui ſe ſuivent immediatement, doivent eſtre doubles de leur precedent. Ainſi apres 2 on met 4, puis 8, puis 16, &c.

Si apres 1 on met 3, la progreſſion eſt triple, & on doit mettre enſuite 9, 27, 81, &c. Ainſi des autres.

On a donné differens noms à tous les nombres de la Progreſſion Geometrique, le premier apres l'unité s'appelle Racine, le ſecond s'appelle Quarré, le troiſiéme Cube, &c.

On peut prendre ſéparément ces nombres de la Progreſſion Geometrique qu'on appelle des puiſſances, & donner à chacun ſa progreſſion particuliere. Par exemple, celle des racines qui n'eſt point autre que la progreſſion naturelle ou Arithmetique, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. à l'infiny : car tous les nombres ont cette faculté de pouvoir eſtre la racine ou la ſource de la dénomination de la progreſſion Geometrique.

Celle des quarrez ſe fait en mettant de ſuitte tous les quarrez de chaque nombre, c'eſt à dire tous les produits de la multiplication de chaque nombre par ſoy-meſme, & le nombre qui ſe multiplie ſoy-meſme s'appelle la racine de ce quarré. Ainſi pour mieux entendre cette progreſſion des quarrez, on a accoûtumé de mettre la racine au deſſus de chaque produit, c'eſt à

dire la progreſſion naturelle des nombres ſur celle des quarrez. Souvent auſſi on met au deſſous leurs differences, qui eſt la progreſſion naturelle des nombres impairs.

Racines 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.
Quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c.
differences 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c.

De meſme on fait celle des Cubes, c'eſt à dire des nombres dont la racine ſe multiplie deux fois, la premiere fois en ſe multipliant ſoy-meſme, elle fait ſon quarré, & la ſeconde en multipliant par elle-meſme ſon quarré.

Racines 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.
Cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512.

Nous ne mettrons pour exemple que les Progreſſions des Quarrez & des Cubes, parce que les Anciens n'alloient pas plus avant; outre qu'il eſt aiſé d'en ajoûter à l'infiny en ajoûtant toûjours une nouvelle multiplication du produit par la racine meſme.

CHAPITRE VIII.

Des Progreſſions dépendantes de l'Arithmetique & Geometrique, comme les Combinaiſons, les nombres Parfaits, Diametraux, & Figurez.

APres ces Progreſſions Geometriques, il y en a beaucoup d'autres qui y ont du rapport, comme la Progreſſion des Combinaiſons qui ſert à faire voir combien des choſes differentes peuvent eſtre combinées, placées ou changées entre elles differemment. En cette Progreſſion le nombre de ces changemens ſe trouve par la multiplication mutuelle des nombres de la progreſſion naturelle, juſqu'à celuy du rang que vous cherchez. Par exemple ſi vous voulez ſçavoir combien 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou tant qu'il vous plaira de choſes, pourront eſtre placées differemment, il faut mettre de ſuitte la progreſſion naturelle, & vis-à-vis la multiplication reciproque des nombres, & de leurs produits.

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.
1, 2, 6, 24, 120, 720, &c.

Ainſi deux choſes pourront eſtre placées deux fois differemment; 3, ſix fois; 4, 24 fois; 5, 120 fois, &c. en multipliant chaque nombre de la progreſſion naturelle par celuy du rang inferieur qui le precede; comme 3 par 2, 4 par 6, 5 par 24, &c.

La ſeconde Progreſſion qui dépend de la Geometrique, eſt celle qui découvre les nombres Parfaits, qui ſont ſi rares qu'il ne s'en trouve qu'un entre dix, un entre cent, un entre mille, un entre dix mille, un entre cent mille, &c. Pour les avoir tous à l'infiny, il ne faut que mettre de deux en

deux les nombres de la Progreſſion double Geometrique ; retirer du plus grand des deux l'unité, & multiplier le reſte par le moindre des deux, le produit ſera toûjours un nombre parfait, qui alternativement aura pour ſa derniere figure, 6 ou 8. Il faut commencer cette progreſſion double par 2 & non pas par l'unité ; & dans le ſecond rang on remettra pour cette fois ſeulement le nombre 4 qui avoit déja occupé la ſeconde place du premier rang. Ainſi.

Prog. double.	2, 4	4, 8	16, 32	64, 128	256, 512	1024, 2048	&c.
Nombres Parfaits.	6	28	496	8128	130816	2096128	&c.
	par 2 fois 3	4 fois 7	16 fois 31	64, 127	&c.		

La troiſiéme Progreſſion qui dépend de l'Arithmetique & Geometrique eſt celle qui donne les nombres Diametraux, c'eſt à dire ceux dont le diametre a ſon quarré égal à la ſomme des deux quarrez des côtez : comme 12 eſt un nombre diametral produit par la multiplication de 3 & 4, dont les quarrez 9 & 16 ſont égaux au quarré de 5, 25 ; & 5 s'appelle le diametre de 12. Et ces trois nombres 3, 4 & 5, font ce qu'ils appellent un Triangle Rectangle en nombres. Tous ces nombres diametraux ſont contenus dans ces deux rangs de Progreſſion de nombres entiers & de Fractions.

Premier Rang.

$1\frac{1}{3}$ $2\frac{2}{5}$ $3\frac{3}{7}$ $4\frac{4}{9}$ $5\frac{5}{11}$ $6\frac{6}{13}$ $7\frac{7}{15}$ $8\frac{8}{17}$ $9\frac{9}{19}$ &c.

Second Rang.

$1\frac{7}{8}$ $2\frac{11}{12}$ $3\frac{15}{16}$ $4\frac{19}{20}$ $5\frac{23}{24}$ $6\frac{27}{28}$ $7\frac{31}{32}$ $8\frac{35}{36}$ $9\frac{39}{40}$ &c.

Pour avoir tel nombre diametral qu'on voudra, il faut reduire en une fraction le nombre entier & la fraction de chacun de ces nombres contenus en ces deux rangs. Par exemple, le premier du premier rang $1\frac{1}{3}$ donnera 4 & 3 qui ſont les côtez de 12 nombre diametral. Or 12 eſt un nombre diametral, parce que le quarré de 5 qui eſt ſon diametre, ſçavoir 25, eſt égal aux deux quarrez de ſes deux côtez 4 & 3, ſçavoir 16 & 9 qui font 25. De meſme le ſecond de ce premier rang $2\frac{2}{5}$ donnera $\frac{12}{5}$ ou 12 & 5 qui ſont les côtez de 60 nombre diametral, dont le diametre eſt 13 racine du quarré 169, égal aux deux quarrez de 12 & de 5, 144 & 25. Ainſi le premier du ſecond rang $1\frac{7}{8}$ donnera $\frac{15}{8}$ qui ſont les côtez de 120 nombre diametral, &c.

Or non ſeulement ces deux rangs ſe peuvent continuer à l'infiny ſuivant la progreſſion naturelle des nombres comme ils ont commencé, mais encore chaque nombre entier avec ſa fraction en particulier, reduit en une fraction, peut produire une infinité de nombres diametraux, & par conſequent une infinité de quarrez qui ſont compoſez de deux autres quarrez, puiſque le diametre de chaque nombre diametral eſt la racine d'un quarré compoſé de deux autres quarrez. L'on aura cette infinité de nombres diametraux en la multiplication d'un ſeul de ces nombres, ou par 2, ou par 3, ou par 4, &c, à l'infiny. Par exemple, le premier nombre du premier

rang $1\frac{1}{3}$ estant reduit en une fraction $\frac{4}{3}$, produira par 2 | $\frac{8}{6}$, par 3 | $\frac{12}{9}$, par 4 | $\frac{16}{12}$, &c. dont les nombres diametraux sont 12, 48, 108, 192, &c. & dont les quarrez composez de deux autres quarrez sont 25, de 9 & 16; 100, de 36 & 64; 225, de 81 & 144; 400, de 144 & 25, &c.

Et comme chaque rang peut aller à l'infiny, & que chaque nombre de chaque rang peut estre multiplié à l'infiny, on aura ainsi une infinité d'infinitez à l'infiny de nombres diametraux. Et c'est une merveille que dans cette infinité de nombres diametraux il ne s'en trouvera pas un dont la premiere figure à main-droite ne soit ou 8, ou 2, ou zero. Surquoy nous aurions bien des reflexions à faire si le temps ne nous emportoit ailleurs.

Remarquez qu'encore qu'un nombre diametral puisse avoir beaucoup de côtez, neanmoins il n'y en a que deux qui puissent luy donner son diametre, c'est à dire qu'il ne peut estre diametral que d'une seule maniere.

Les Nombres Triangulaires viennent de l'addition de la Progression naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Les quarrez de l'addition de la mesme progression, en laissant un, comme 1 & 3, font 4. | 1, 3, 5, font 9 | 1, 3, 5, 7, font 16, &c.

Les Pentagones en passent deux, 1 & 4 font 5 | 1, 4, 7, font 12, &c.

Ainsi toutes les figures des nombres en passent toûjours un nombre davantage pour les produire : elles en passent 3 pour les Hexagones | 4 pour les Heptagones, &c.

La progression de ces nombres figurez appartient plutost à l'Arithmetique, qu'à la Geometrique.

Il est maintenant temps de donner les Regles ou Maximes de découvrir les nombres cachez, ou les sommes de toutes les Progressions.

CHAPITRE IX.

Regles pour trouver les sommes de toutes sortes de Progressions Arithmetiques & Geometriques multiples.

POur avoir la somme de la Progression Arithmetique, soit de celle qui commence par l'unité, & qui continuë par tous les nombres de suite, & dans leur ordre naturel,

ainsi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c.

Soit de celle qui les interrompt ou du binaire, ou ternaire, &c. en commençant par l'unité ou par un autre nombre.

comme 1, 3, 5, 7, 9, &c. | ou 2, 4, 6, 8, 10, &c. |
ou 1, 4, 7, 10, 13, &c. | ou 2, 5, 8, 11, 14, &c.
ou 1, 5, 9, 13, 17, &c. | ou 2, 6, 10, 14, 18, &c.

Sans repeter toutes les Regles que nous en avons données au Chap. III. du V. Livre, nous nous contenterons de celle-cy.

Il faut 1. joindre les deux extrêmes, c'est à dire le premier & le dernier

des nombres proposez. Puis il faut multiplier le produit de cette addition, par la moitié du nombre des termes de la Progression, si ces termes sont en nombre pair : Ou s'ils sont en nombre impair, on multipliera le nombre des termes par la moitié du produit de l'addition des deux extrêmes. Par exemple, si l'on propose cette progression naturelle.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Les deux extrêmes 1 & 10, ajoûtez font 11, qui estant multipliez par 5 la moitié des 10 termes de la progression, qui est en nombre pair, on aura 55 pour la somme.

Mais si l'on propose cette progression en nombres impairs, quant au nombre des termes,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Apres avoir joint les deux extrêmes 1 & 9 qui font 10, on prendra la moitié de 10 qui est 5, & par luy on multipliera le nombre des termes qui est 9, & l'on aura pour la somme de la progression, 45.

Cette Regle est generale pour toutes les progressions Arithmetiques de quelque dénomination qu'elles puissent estre.

Pour avoir la somme de la Progression Geometrique double, il faut doubler le dernier & puis en ôter l'unité.

Par exemple, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, | deux fois 64 font 128, d'où retirant l'unité il reste 127 pour la somme des nombres precedens.

Pour avoir la somme de toutes les autres progressions multiples Geometriques, il faut 1°. retirer le premier nombre du dernier : 2°. diviser le reste par un nombre qui soit moindre d'une unité que le dénominateur de la progression proposée : 3°. il faut adjoûter le quotient de cette division au dernier nombre tel qu'il estoit avant qu'on en eût retranché le premier.

Exemple I.

3, 9, 27, 81, 243, | ôtant le premier 3 de 243 il reste 240, qu'il faut diviser par 2, parce que la progression est triple, & il viendra 120 au quotient, qui estant adjoûté à 243 donne pour la somme 363.

Exemple. II.

4, 16, 64, 256, 1024, | reste 1020, qui estant divisé par 3 donne au quotient 340, qui estant ajoûté à 1024 donne pour la somme 1364. Ainsi de toutes les autres Progressions Geometriques multiples.



CHAPITRE X.

Trouver la somme de toutes les Progreßions des Nombres Figurez, Triangulaires, Quarrez, Pentagones, Hexagones, Heptagones, Octogones, &c.

Les Triangulaires estant fotmez de l'addition des nombres de la Progression naturelle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. comme nous avons enseigné dans la premiere Regle des Progressions Arithmetiques, donnent ainsi par ordre les nombres Triangulaires.

Progressions Arith. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 &c.
Progr. Triangul. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.

Quand on cherche la somme des nombres Ttiangulaires, c'est outre cela chercher la somme des sommes particulieres déja trouvées.

Pour découvrir ces autres sommes des nombres Triangulaires, il faut 1°. mettre de suitte la progression naturelle des nombres partagée de trois en trois, & dessous y mettre une autre progression partagée aussi de trois en trois, dont les trois premiers termes seront égaux à ceux de la progression naturelle; puis les trois du second ternaire, seront separez de deux unitez de ceux du premier & entr'eux aussi, c'est à dire que le premier nombre du second ternaire sera separé de deux unitez du dernier nombre du premier ternaire; & qu'ensuite les nombres de ce second ternaire seront éloignez entr'eux de deux unitez, ceux du troisiéme ternaire seront separez du second de trois unitez, & entr'eux aussi; ceux du quatriéme ternaire seront separez du troisiéme de quatre unitez, & entr'eux aussi; ceux du cinquiéme le seront du quatriéme de cinq unitez, & entr'eux aussi; & toûjours de mesme tant qu'on en voudra, ils seront separez du ternaire precedent & entr'eux, d'autant d'unitez que la dénomination de leur rang l'indiquera, de 6 aux sixiéme rang, de 7 au septiéme, &c.

Ainsi	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	&c.
	1, 2, 3	5, 7, 9	12, 15, 18	22, 26, 30	35, 40, 45	&c.

Cela fait il faudra multiplier les nombres de chaque ternaire de la progression naturelle par ceux de la seconde progression qui leur répondent, & le premier & le second de chaque ternaire produiront justement la somme des nombres Triangulaires proposez, & pour le troisiéme de chaque ternaire il faudra ajoûter au produit de la multiplication le tiers du nombre de la progression naturelle qui luy répond. Ainsi vous aurez les sommes de tous les nombres Triangulaires proposez.

Sommes des Nombres Triangulaires.

Du 1er. ternaire.	du 2.	du 3.	du 4.	du 5e.	&c.
1, 4, 10	20, 35, 36	84, 120, 165	220, 286, 364	455, 560, 680	

Mais afin de trouver aiſément les rapports ou correſpondances de ces deux progreſſions, ſans que meſme il ſoit beſoin de les écrire ny de les avoir devant les yeux, il faut ſuivre cette methode. 1°. On trouvera en quel ternaire ſera le nombre propoſé des ſommes, en diviſant ce nombre propoſé par 3, car comme chaque ternaire de la progreſſion naturelle finit par un nombre qui eſt meſuré par 3, s'il ne reſte rien apres la diviſion le quotient vous montrera juſtement en quel rang des ternaires il eſt le troiſiéme: par exemple, ſi on vous demandoit la ſomme de 12 nombres, en diviſant 12 par 3, il vient 4 au quotient, qui ſignifie que 12 eſt le troiſiéme dans le quatriéme rang des ternaires. Si apres le quotient il reſte deux, c'eſt à dire que le nombre propoſé eſt le ſecond dans le rang du ternaire qui ſuit le quotient, s'il n'a reſté qu'un, c'eſt à dire que le nombre propoſé eſt le premier dans le rang du ternaire qui ſuit le quotient trouvé. Comme ſi on vous propoſoit 10, ou 11; en les diviſant par 3, il viendroit 3 au quotient & reſteroit 1 à 10, & 2 à 11, ce qui ſignifieroit que 10 eſt le premier dans le quatriéme rang des ternaires de la progreſſion naturelle, & qu'11 y eſt le ſecond. Il eſt donc aiſé de trouver par ce moyen en quel rang des ternaires de la progreſſion naturelle ſont les nombres qu'on peut propoſer.

Voyons maintenant à trouver les nombres de la ſeconde Progreſſion, qui répondent à cette premiere. Et pour cela voicy une methode merveilleuſe, & qui ſert à faire voir combien il y a de treſors cachez dans les differentes diſpoſitions des nombres.

Comme tous les derniers nombres de chaque rang de ternaires de cette ſeconde progreſſion ſont auſſi meſurez par 3, il arrive que chaque dernier nombre de chaque rang eſtant diviſé par 3, donne de ſuite tous les nombres triangulaires chacun en leur rang: le premier qui eſt 1, dans le premier rang, parce que 3 eſtant diviſé par 3 donne 1: le ſecond qui eſt 3 dans le ſecond rang, parce que 9 eſtant diviſé par 3 donne 3: le troiſiéme qui eſt 6 dans le troiſiéme, parce que 18 eſtant diviſé par 3 donne 6: le quatriéme qui eſt 10 dans le quatriéme, parce que 30 diviſé par 3 donne 10, &c. à l'infiny. Tellement qu'ayant trouvé premierement dans la progreſſion naturelle, par le quotient de la diviſion des ternaires, en quel rang des ternaires eſt le nombre propoſé, on trouve à meſme temps par ce meſme quotient quel eſt le nombre Triangulaire qui ſe trouve dans la ſeconde progreſſion. Comme ayant diviſé 12 par 3, d'où il vient 4, qui ſignifie que 12 eſt preciſément le troiſiéme dans le quatriéme ternaire; on apprend auſſi à meſme temps que le nombre qui luy répond dans la ſeconde progreſſion eſt le quatriéme nombre triangulaire 10, qui eſt venu de la diviſion par 3 du troiſiéme nombre du quatriéme ternaire de la ſeconde progreſſion, & qui par conſequent eſtant multiplié par 3, reſtituë ce nombre qui eſt 30, qui répond à 12 de la premiere progreſſion. Et comme on ſçait le rang des ternaires de la ſeconde progreſſion par le moyen de ceux de la premiere, on ſçaura auſſi qu'elle place ces nombres tiendront dans leur rang de ternaires, & ce qu'il en faudra ſoutraire de la multiplication du nombre triangulaire trouvé par 3. Car

comme

comme ceux du quatriéme ternaire sont distans l'un de l'autre de quatre unitez, il en faudra retrancher 4 pour le second rang, & 8 pour le premier. Ainsi ayant trouvé que 30 répond à 12 de la progression naturelle, & que ce 30 est dans le quatriéme rang des ternaires, il en faudra retrancher 4 pour le second de ce quatriéme rang, & l'on aura 26 qui répond à 11; & il en faudra retrancher 8 pour le premier de ce quatriéme rang & l'on aura 22 qui répond à 10. Par ce moyen l'on aura les sommes des dix premiers nombres triangulaires en multipliant 10 par 22, & il viendra 220 pour leur somme; & des onze premiers en multipliant 11 par 26, & il viendra 286; & enfin des 12 premiers en multipliant 12 par 30 & il viendra 360 auquel ajoûtant le tiers de 12 qui est 4, on aura 364 pour la somme des douze premiers nombres triangulaires. Ainsi des autres.

Autre Methode pour trouver la somme des Nombres Triangulaires proposez.

NOus allons donner une autre Methode qui sera en quelque maniere generale pour les autres nombres figurez.

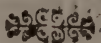
Il faut comme auparavant partager la progression naturelle des nombres par ternaires, ainsi

1, 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9 | 10, 11, 12 | &c.

Puis multiplier l'addition des nombres de cette progression, qui fait les nombres triangulaires, c'est à dire qu'il faut multiplier chaque nombre triangulaire par le nombre de la dénomination de chaque ternaire, ceux du premier ternaire par 1, ceux du second par 2, ceux du troisiéme par 3, &c. Le premier de chaque ternaire, par cette multiplication donnera justement la somme; il faudra ajoûter au second de chaque ternaire apres la multiplication, le tiers du nombre triangulaire qui sera venu de l'addition des nombres de la progression naturelle: & au troisiéme de chaque rang il faudra ajoûter les deux tiers du nombre triangulaire.

Exemple.

Si l'on demande les sommes de 4 ou 5, ou 6 nombres triangulaires: comme ces nombres sont dans le second ternaire, il faudra multiplier par 2 leurs nombres triangulaires 10, 15, 21, & adjoûter au second 5, au troisiéme 14; & il viendra 20, 35 & 56 pour les sommes de ces trois nombres. Ainsi de tous les autres.



EXEMPLE.

Des Sommes des quinze premiers nombres Triangulaires, suivant les deux methodes precedentes.

Premiere Methode.

Prog. Nat.	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15
Seconde Prog.	1, 2, 3	5, 7, 9	12, 15, 18	22, 26, 30	35, 40, 45
Nombres Triang.	1, 3, 6	10, 15, 21	28, 36, 45	55, 66, 78	91, 105, 120
Somme des Nombres Triang.	1, 4, 10	20, 35, 56	84, 120, 165	220, 286, 364	455, 560, 680

Seconde Methode.

	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15
Nombres Triangul.	1, 3, 6	10, 15, 21	28, 36, 45	55, 66, 78	91, 105, 120
Multiplicateur des Nombres Triangl.	1	2	3	4	5
Sommes.	1, 4, 10	20, 35, 36	84, 120, 165	220, 286, 364	455, 560, 680

CHAPITRE XI.

Trouver la Somme de tous les quarrez proposez.

DIſpoſez la Progreſſion naturelle des nombres de trois en trois, & ſous elle diſpoſez une autre progreſſion de trois en trois, qui repete toûjours ſon troiſiéme terme pour recommencer un autre rang de ternaires. La premiere finira toûjours par un nombre qui ſera meſuré par 3, & la ſeconde toûjours par un impair. Ainſi

1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	&c.
1, 2, 3	3, 4, 5	5, 6, 7	7, 8, 9	9, 10, 11	&c.

Cela fait il faut aſſembler la ſomme de la progreſſion naturelle juſqu'au nombre des quarrez propoſez, & enſuitte multiplier le produit de cette addition par le nombre de la ſeconde progreſſion, qui répondra au nombre des quarrez propoſez. Sous le premier de chaque rang de ces ternaires, la ſomme des quarrez propoſez ſe trouvera juſtement par cette multiplication: Sous le ſecond de chaque rang, on retranchera du produit de la multiplication le tiers de la ſomme de la progreſſion naturelle du nombre qui luy répond: Et ſous le troiſiéme de chaque rang on retranchera les deux tiers de la ſomme de la progreſſion naturelle.

Par exemple: ſi l'on demande la ſomme des ſept premiers quarrez; apres avoir ajoûté la ſomme de la progreſſion naturelle des ſept premiers nombres qui fait 28, on regardera quelle place tient dans ſon rang de ternaire le nombre 7, & quel eſt le nombre qui luy répond dans les ternaires de la ſeconde progreſſion, par qui le produit de l'addition des ſept pre-

miers nombres doit estre multiplié. On voit qu'il est le premier dans le troisiéme ternaire de la progression naturelle, & que c'est 5 qui luy répond & qui est aussi par consequent le premier dans le troisiéme ternaire de la seconde progression: Ainsi la multiplication de 28 par 5 donnera justement la somme des sept premiers quarrez qui est 140. Ainsi la somme des huit premiers quarrez sera 204, parce que 36 qui estoit le produit de l'adition de la progression naturelle des huit premiers nombres, estant multiplié par 6 qui répond à 8, faisoit 216, d'où retranchant le tiers de 36 qui est 12 il reste 204. Ainsi la somme des neuf premiers quarrez sera 285, parceque 45 qui est la somme de la progression naturelle des neuf premiers nombres estant multipliez par 7 donnoit 315, d'où retranchant les deux tiers de 45 qui sont 30, il reste 285. Ainsi de tous les autres nombres en chaque rang.

Et afin qu'il soit facile de trouver la correspondance de ces deux differentes progressions, sans mesme les écrire, voicy la methode qu'il faut suivre. Comme les deux premiers ternaires de l'une & l'autre progression sont égaux, que les seconds sont distans de l'unité en chacun de leurs nombres; que les troisiémes sont distans de deux unitez, les quatriémes de trois unitez, & ainsi toûjours une unité moins que la dénomination de leur rang, on sçaura aisément leur correspondance quand on sçaura précisement les rangs des ternaires de la progression naturelle. Or il est aisé de trouver ces rangs par la methode que nous avons donnée cy-devant pour les nombres Triangulaires; c'est à sçavoir en divisant par 3 le nombre proposé de quarrez dont on demande la somme. Car si la division est juste, c'est à dire qu'il ne reste rien, le quotient marquera le troisiéme ou dernier du ternaire qu'il indique: par exemple, du cinquiéme ternaire si c'est 5, du sixiéme si c'est 6, &c. s'il en reste deux apres le quotient, il sera le second dans le rang des ternaires qui suit la dénomination du quotient; & s'il n'en reste qu'un, il sera le premier du ternaire qui suit la dénomination du quotient. Par exemple, si on demande la somme des dix-huit premiers quarrez, on divisera 18 par 3, pour sçavoir en quel ternaire est 18, & comme 18 est justement divisé par 3, qui donne 6 pour quotient, cela veut dire que 18 est le troisiéme ou dernier nombre du sixiéme ternaire. Si l'on en demande 17, en divisant 17 par 3, il vient 5 au quotient & reste 2, qui signifie que 17 est le second dans le sixiéme ternaire; & si l'on en demande 16, en divisant 16 par 3, il vient 5 & reste 1, qui fait voir que 16 est le premier dans le sixiéme ternaire.

Or il sera aisé ensuite de donner les nombres de la seconde progression qui leur répondent. Car puisque les nombres de la seconde progression sont distans de ceux de la premiere d'autant d'unitez, une moins que la dénomination des rangs des ternaires; les nombres de la seconde progression qui répondent & sont au sixiéme rang des ternaires, seront distans chacun de cinq unitez de ceux de la progression naturelle du sixiéme rang des ternaires, & par consequent dans la seconde progression 11, répondra à 16; 12 à

17, & 13 à 18. Et multipliant par 11, par 12, & par 13, les additions de la progression naturelle des nombres 16, 17, & 18, qui sont 136, 153, 171 : il viendra pour la somme des 16 premiers quarrez 1496. | pour celle des 17, (le retranchement fait de 51) 1785 | & pour celle des 18 premiers quarrez, (le retranchement fait de 114) 2109. |

Ainsi si l'on demande la somme des cent premiers quarrez, en divisant 100 par 3, il viendra au quotient 33, & restera 1, & par consequent 100 sera le premier du ternaire suivant qui est le 34e. & le nombre de la seconde progression qui luy répondra, sera distant de luy de 33 unitez, & sera par consequent 67, par lequel il faudra multiplier la somme de l'addition de la progression naturelle des cent premiers nombres qui est 5050, & le produit sera 338350 pour la somme des cent premiers quarrez, de laquelle somme il n'y a point de retranchement à faire, parce que les deux nombres de la premiere & seconde progression, occupent la premiere place dans leurs ternaires.

CHAPITRE XII.

Trouver la somme de tous les Pentagones proposez.

LEs Nombres Pentagones se forment en ajoûtant depuis l'unité, tous les nombres de suite, qui laissent entre eux deux unitez, comme 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. qui font ces pentagones 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, &c.

Pour en avoir la somme & de tous ceux qu'on proposera, il faut multiplier la somme des nombres de la progression naturelle par le nombre des pentagones qu'on demande; par exemple, si l'on en propose deux, on multipliera par 2, l'addition des deux premiers nombres qui est 3, & il viendra 6, qui est la somme des deux premiers pentagones 1 & 5, par 3 si l'on en demande trois, 1, 2, 3, qui font 6, par 3 c'est 18 pour la somme des trois premiers 1, 5, 12.

Par 4, les 4 premiers 1, 2, 3, 4, qui font 10, par 4 c'est 40. Par 5 les cinq premiers qui font 15, il viendra 75. Ainsi de tous les autres.

CHAPITRE XIII.

Trouver la somme de tous les Hexagones proposez.

LEs Nombres Hexagones se forment en ajoûtant tous les nombres depuis l'unité, qui laissent entr'eux trois unitez, comme 1, 5, 9, 13, 17, 21, &c. qui font ces Hexagones, 1, 6, 15, 28, 45, 66, &c.

Pour avoir la somme des Hexagones proposez, il faut premierement dresser ces deux progressions, dont on trouvera les correspondances par la

voye des distances que gardent ces ternaires, comme nous avons fait dans les precedentes.

1, 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9 | 10, 11, 12 | 13, 14, 15 | &c.
1, 2, 3 | 5, 6, 7 | 9, 10, 11 | 13, 14, 15 | 17, 18, 19 | &c.

Il faut multiplier la somme de l'addition de la progression naturelle par le nombre de la seconde progression qui luy répond. Dans le premier de chaque ternaire la somme viendra justement par cette multiplication : Dans le second de chaque ternaire, il faudra ajoûter à la somme de la multiplication le tiers de la somme de la Progression naturelle : Dans le troisiéme, il faudra ajoûter à la somme de la multiplication les deux tiers de la somme de la progression naturelle. Exemple. Si je veux la somme des quatre premiers hexagones qui est 50, je l'auray en multipliant 10, qui est la somme de la progression naturelle des quatre premiers nombres, par 5 qui répond à 4, & il viendra justement 50, parce que ces deux nombres sont les premiers dans leur ternaire. Si je veux la somme des cinq premiers je l'auray en multipliant 15 par 6, & il viendra 90, à quoy ajoûtant 5 le tiers de 15, j'auray 95 pour la somme des cinq premiers hexagones. Enfin j'auray la somme des six premiers en multipliant 21 par 7, d'où il viendra 147, auquel ajoûtant les deux tiers de 21 qui sont 14, j'auray 161 pour la somme des six premiers hexagones. Ainsi de tous les autres.

CHAPITRE XIV.

Trouver la somme de tous les Heptagones proposez, & des Cubes.

LES Nombres Heptagones se forment en ajoûtant tous les nombres depuis l'unité qui laissent entr'eux quatre unitez, comme 1, 6, 11, 16, 21, 26, &c. qui font ces Heptagones 1, 7, 18, 34, 55, 81, &c.

Pour avoir la somme des heptagones proposez, il faut dresser ces deux progressions, qui pourront estre continuées tant qu'on voudra dans l'ordre & la distance des ternaires qu'elles ont commencé.

1, 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9 | 10, 11, 12 | &c.
1, 2, 3 | 6, 7, 8 | 11, 12, 13 | 16, 17, 18 | &c.

Puis on multipliera la somme de la progression naturelle par les nombres de la seconde progression. Sous le premier de chaque ternaire la somme des heptagones viendra justement : Sous le second de chaque ternaire il faudra ajoûter à la somme de la multiplication, les deux tiers de la somme de la progression naturelle : Sous le troisiéme il faudra ajoûter à la somme de la multiplication, quatre tiers de la somme de la progression naturelle, c'est à dire, & la somme mesme de la progression naturelle, & encore son tiers. Exemple. Pour la somme des quatre premiers heptagones, 6 fois 10 donne justement 60 qui est la somme des quatre premiers heptagones 1, 7, 18, 34. | Pour les cinq premiers, 7 fois 15 font 105, auquel ajoûtant les

deux tiers de 15 qui sont 10, il vient pour la somme 115, somme de 1, 7, 18, 34, 55 | pour les six premiers, 8 fois 21 font 168, auquel ajoûtant 21 & son tiers 7 qui font 28, on aura 196 qui est la somme des six premiers heptagones, 1, 7, 18, 34, 55, 81. Ainsi des autres.

A l'imitation de ces methodes, chacun pourra inventer des voyes d'assembler toutes les sommes de quelques nombres figurez & reguliers quels qu'ils soient. Car nous n'avons pas entrepris de tout faire ny de tout dire. Nous donnerons encore icy le moyen de

Trouver la somme de tous les Cubes proposez.

ASsemblez la somme de leurs racines, qui ne sont autres que les nombres de la progression naturelle, & quarrez cette somme vous aurez la somme des Cubes proposez. Par exemple, si vous voulez la somme des quatre premiers cubes, en quarrant 10 qui est la somme des quatre premiers nombres ou racines, il viendra 100 qui est la somme des quatre premiers cubes, 1, 8, 27, 64. | &c.

CHAPITRE XV.

Exemples des Questions qui se peuvent faire sur les Progressions.

TRois hommes entreprennent de vuider un étang en l'espace d'un jour de douze heures, & on leur promet pour recompense à chacun une livre pour chaque muids d'eau, à la premiere heure ils en vident un, & gagnent un écu pour eux trois, c'est à dire chacun une livre: à la seconde heure ils en vuident deux & gagnent six livres: à la troisiéme ils en vuident trois & gagnent neuf livres, & ainsi ils augmentent le nombre des muids selon le nombre des heures, & par consequent leur recompense augmente par la mesme progression de trois en trois. Ce qui fait ces deux progressions Arithmetiques.

muids. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
argent. 3, liv. 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36.

On demande combien ils ont vuidé de muids d'eau en douze heures, & combien il leur faut donner d'argent?

Muids, 1 & 12 font 13, qui multipliez par 6, donnent la Reponse, 78 muids.
Argent, 3 & 36 font 39, qui multipliez par 6, donnent la Réponse, 234 liv.

Il y a des progressions Arithmetiques composées. Par exemple, on demande combien feroit de pas ou de lieuës un homme qui voudroit rapporter cent pommes distantes chacune d'un pas dans un panier qui seroit à un pas de la premiere pomme, en les allant querir l'une apres l'autre. Comme il feroit deux pas pour apporter la premiere pomme dans le panier, sçavoir un en allant & l'autre en revenant, qu'il en feroit 4 pour la se-

conde, 6 pour la troisiéme, 8 pour la quatriéme, & ainsi doublant les pas pour le nombre des pommes, il en feroit 200 pour la centiéme, & par consequent, (sans qu'il soit besoin d'écrire toute la progression Arithmetique distante du binaire jusqu'à 200 | 2, 4, 6, 8, 10, &c.) en assemblant 2 le premier nombre, & le dernier 200, on aura 202, qui estant multipliez par 50 la moitié du nombre des termes qui est 100, donneront 10100 pas, il aura fait cinq lieuës & 100 pas, en mettant deux mille pas pour chaque lieuë.

I. Quelquefois dans les questions de la progression Arithmetique, on ne donne que les deux extrêmes avec le nombre des termes, sans donner leur difference ou distance.

II. Quelquefois on donne les deux extrêmes & leur difference qui est entre les nombres, sans donner le nombre des termes.

III. Quelquefois on donne la difference & le dernier nombre, & le nombre des termes, sans donner le premier de la progression.

IV. Quelquefois on donne le premier, la difference & le nombre des termes sans donner le dernier de la progression.

V. Enfin quelquefois on donne le premier, la difference & le nombre des termes sans donner les termes du milieu, soit qu'on donne le dernier ou non, & neanmoins il faut trouver la somme de la progression, comme aussi en tous les cas precedens, pour lesquels voicy autant de Regles expliquées par des Exemples.

I. Pour le premier cas, on trouve la difference ou distance des termes, en retirant le premier du dernier, & divisant le reste par le nombre des termes diminué de l'unité. Comme si on donne 5 pour premier, 26 pour dernier, & 8 pour le nombre des termes; 5 estant ôté de 26 laisse 21, qui estant divisé par 7 donne 3 pour la difference, sur laquelle on peut mettre les huit termes de la progression, & répondre ainsi à la question, combien un homme faisant l'aumône huit jours durant, & ayant donné le premier jour cinq livres & le dernier vingt-six livres, il auroit donné chaque jour en augmentant ses distributions également tous les jours pour pouvoir donner huit fois l'aumône, depuis 5 jusqu'à 26? Réponse.

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. | qui font 124 livres,

II. Pour le second cas, on trouve le nombre des termes en retirant le premier du dernier, & divisant le reste par la difference, le quotient estant augmenté de l'unité sera le nombre des termes. Exemple. Si un homme a mis deux ouvriers en besogne, & que chaque jour il en augmente quatre jusqu'à ce qu'il en aye trente, combien de jours aura-t'il fait travailler. En retirant 2 de 30 il reste 28, qui estant divisé par 4 la difference des nombres, il viendra 7, qui estant augmenté d'1 fera 8 pour le nombre des termes. Ainsi.

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.

III. Pour le troisiéme cas, on trouve le premier nombre de la progression en multipliant la difference par le nombre des termes diminué d'une unité, & retirant du dernier nombre le produit de cette multiplication, le

reste sera le premier qu'on cherche. Exemple. Un homme a travaillé à un ouvrage de trois en trois jours, il y a travaillé sept jours & est arrivé au trente-troisiéme jour, quel jour du mois precedent qui avoit 30 jours a-t'il commencé? Operez & vous trouverez 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33.

IV. Pour le quatriéme cas, on trouve le dernier nombre de la progression en multipliant la difference par le nombre des termes diminué de l'unité, & le produit de la multiplication estant adjoûté au premier nombre, sera le dernier qu'on cherche. Le revenu d'une terre ou melonniere a rapporté à son maistre cinq livres la premiere année, & a pendant douze ans augmenté chaque année de quatre, quel a esté le revenu la douziéme année. 4 fois 11 font 44, qui ajoûtez à 5 donne 49 pour le dernier, & la progression est telle.

5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49.

V. Enfin pour le cinquiéme cas, on trouvera aisément la somme de la progression, soit qu'on n'en donne pas le dernier, soit qu'on ne donne pas les nombres du milieu, qu'il ne sera pas ainsi necessaire d'écrire. Si l'on ne donne pas le dernier, on le trouvera par le cas precedent, & quoy qu'on n'écrive pas tous les termes de la progression, ce sera assez d'en avoir le premier, la difference, le nombre des termes, & le dernier, puisque ce n'est que par le moyen de ces quatre choses, sçavoir le premier, la difference, le nombre & le dernier, qu'on découvre la somme de toute la progression, en ajoûtant comme il a esté dit cy-dessus, le premier au dernier, & multipliant cette addition par la moitié du nombre des termes, si ce nombre est pair; ou multipliant le nombre des termes par la moitié de l'addition du premier avec le dernier, si le nombre des termes est impair. Exemple. Un Collecteur de tailles amasse sept jours durant sa taille dans une Paroisse de la campagne, le premier jour deux livres, & tous les autres jours il augmente sa collecte de trois livres par jour, on demande combien il aura levé au bout de la semaine: vous trouverez ce qu'il aura levé le dernier jour en multipliant 3 la difference par 6, nombre des termes diminué d'une unité, car il y a sept jours, & il viendra 18 auquel ajoûtant le premier nombre qui est 2, vous aurez 20 pour le dernier. Et puis par la regle de l'addition des sommes de la progression, dont le nombre des termes est impair, multipliant la moitié de 22 qui est 11 par 7, il viendra 77 qui est la somme de cette progression 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Quelquefois il y a des progressions Arithmetiques composées de deux differentes progressions, dont la premiere conserve toûjours son premier terme ou dénominateur, & la seconde a tous les termes distans entre eux de l'unité, soit qu'elle commence par l'unité 1, 2, 3, &c. ou par quelqu'autre nombre 2, 3, 4 | ou 3, 4, 5, &c. Et nous les mettrons icy pour un sixiéme cas.

Exemple. Deux hommes entreprennent un mesme voyage, & partent le mesme jour & arrivent à mesme temps au terme de leur voyage, quoy qu'ils fassent chaque jour different chemin. Le premier fait tous les jours huit

huit lieuës, le second ne fait que trois lieuës le premier jour, quatre le second, cinq le troisiéme, & ainsi toûjours de suite il augmente d'une lieuë à chaque jour. On demande quand ils arriveront & combien ils auront fait de lieuës l'un & l'autre, puisque dans la supposition ils doivent arriver le mesme jour, ils en auront fait autant l'un que l'autre. Regle pour toutes les questions de cette nature. Doublez la distance des deux premiers termes, (qui sont icy 8 & 3, dont la distance 5 estant doublée donne 10) adjoûtez au produit l'unité, (& vous aurez 11) par ce premier produit multipliez le premier terme ou le dénominateur de la premiere progression (qui est icy 8) & le produit de cette derniere multiplication sera le nombre cherché: comme icy 8 multiplié par 11 donne 88, qui est le nombre des lieuës qu'ils auront fait tous deux, & 11 sera le nombre des jours qu'ils auront employé à leur voyage, qui donnera ces deux progressions, dont les deux sommes sont pareilles, & font 88.

8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8.
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

II. Exemple. Un homme perce deux muids de vin le mesme jour, & en tire du premier douze pintes par jour, & du second une pinte le premier jour, deux le second, trois le troisiéme, & ainsi de suite jusqu'à ce que les deux muids viennent à l'égalité. En combien de jours cette égalité arrivera-t'elle, & combien aura-t'on tiré de pintes de chaque muids? Réponse. En vingt-trois jours l'on aura tiré de chaque muids 276 pintes; & puisque le muids tient 288 pintes il en restera 12 dans chacun. Operation. Les deux premiers termes sont distans d'11, lesquels estant doublez font 22, & l'unité adjoûtée ce sont 23, qui multipliez par 12 premier terme du dénominateur de la premiere progression, donne 276. Comme aussi la progression de 23 nombres depuis l'unité, donne pour sa somme 276. Car 1 & 23 font 24, dont la moitié 12 multipliant 23 fait 276.

Quelquefois on donne le nombre des termes, leurs differences & leur somme, sans donner les deux extrêmes, ny specifier ceux du milieu. Puisque la somme est produite par la multiplication du premier & du dernier, par la moitié du nombre des termes, quand on n'a pas ce premier & dernier on voit quel produit peut faire la moitié du nombre des termes, & sur quel nombre, afin de pouvoir faire la somme, & alors par le moyen des differences, on peut trouver quels sont ces extrêmes. Exemple. Une fontaine à dix jets d'eau; le second jet d'eau en verse pendant une heure deux pintes plus que le premier; le troisiéme deux plus que le second, & ainsi de suite chacun en verse deux plus que le precedent, ce qui fait la somme de 100 pintes d'eau. On demande ce qu'en versent le premier & le dernier, & ceux encore du milieu. Puisqu'il y a dix termes dont la somme doit faire 100, & la distance d'un chacun est 2, la moitié du nombre des termes qui est 5, doit multiplier 20 pour faire les 100 pintes, en divisant 100 le nombre des pintes, il vient 20, & par consequent le premier jet

d'eau n'en verſe qu'une pinte, & le dernier 19 qui font en l'addition 20 ; & ainſi tous les 10 nombres ſont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, dont la ſomme eſt 100. Quoy qu'il y ait beaucoup d'autres nombres qui puiſſent faire celuy de 20, eſtant ajoûtez comme 2 & 18, 3 & 17, neanmoins il n'y a qu'1 & 19, entre leſquels il s'en trouvent huit autres pour faire le nombre des termes qui eſt 10 dans la queſtion propoſée.

CHAPITRE XVI.

Queſtions ſur les Progreſſions Geometriques.

IL y a des Progreſſions Geometriques qui ne ſont à proprement parler que des multiplications, qui finiſſent par la deſtruction de leur premier terme, de leur ſecond, de leur troiſiéme, &c. ne laiſſant que le dernier ; & dans ces progreſſions on n'a point de ſommes à adjoûter. On les employe dans la production des ſemences qui finiſſent, & ſont détruites quand elles en produiſent d'autres. Mais il y a des progreſſions Geometriques dont on doit aſſembler la ſomme de tous les produits, depuis le premier juſqu'au dernier. Voicy un exemple de l'une & l'autre.

Joſeph ayant été étably par Pharaon ſur toute l'Egypte pour faire la proviſion de bleds neceſſaire, pendant les ſept années de fertilité, afin de ſubvenir aux ſept années de ſterilité, ſuppoſant qu'il donna ordre à douze Gouverneurs d'autant de Provinces d'Egypte, de faire ſemer dans leurs Provinces chacun mille ſeptiers de bled, & que comme chaque grain devoit produire le centuple, ils euſſent toûjours ſoin de faire ſemer toute la recolte juſqu'à la ſeptiéme année. On demande combien ils recüeillirent de bled la ſeptiéme année.

Les 12000 ſeptiers en avoient produit la premiere année,	1200000
La ſeconde année, ceux-cy en produiſirent	120000000
La troiſiéme année,	12000000000
La quatriéme,	1200000000000
La cinquiéme,	120000000000000
La ſixiéme,	12000000000000000
La ſeptiéme, ils en recueillirent	1200000000000000000

C'eſt à dire un quintilion, (qui vaut un milliard de milliards de milliars, de milliars de millions de mille) deux cens quadrilions de ſeptiers, qui eſt une ſi prodigieuſe quantité, que quand toutes les maiſons de l'Egypte euſſent eſté converties en greniers, elles ne l'euſſent pû contenir. Et ſuppoſant que Joſeph eut vendu ce bled à une livre le boiſſeau la premiere année de la ſterilité, deux livres la ſeconde, trois livres la troiſiéme, quatre livres la quatriéme, cinq livres la cinquiéme, ſix livres la ſixiéme,

& sept livres la septiéme, il auroit receu cette prodigieuse somme d'argent.

La premiere année,	2057142857142857142	livres.
La seconde,	4114285714285724284	liv.
La troisiéme,	6171428571428571426	liv.
La quatriéme,	8228571428571428568	liv.
La cinquiéme,	10285714285714285710	liv.
La sixiéme,	12342857142857142852	liv.
La septiéme,	14400000000000000000.	liv.
Somme totale.	57599999999999999982	livres.

Cette somme s'énonce ainsi, 57 quintilions, 599 quadrilions, 999 trilions, 999 bilions, 999 milions, 999 mille, 982 livres.

Supposant que Pharaon ayant mis tout cet argent en ses coffres, demanda à Joseph qu'elle recompense il vouloit pour luy, de tant de richesses qu'il luy avoit amassées, & que Joseph demanda au Roy une livre de rente pour la premiere année, deux pour la seconde, quatre pour la troisiéme, huit pour la quatriéme, & ainsi toûjours en doublant jusqu'à 24 années, ce qui fit pour la vingt-quatriéme année la somme de 16777216, seize millions sept cent septante-sept mille deux cens seize livres, & assemblant toutes les sommes qu'il a receuës pendant les 24 années, elles se montent à 33554431 livres, c'est à dire 33 millions 554 mille 431 livres. Car pour avoir toutes les sommes precedentes en une, il ne faut que doubler la derniere & en retirer l'unité, puisque c'est la proportion double.

On peut faire une infinité de questions sur ces progressions Geometriques, qui servent mesme à prouver des veritez de l'Ecriture-Sainte; comme par exemple, comment il s'est pû faire qu'en l'espace de 210 ans, il soit venu de 70 Chefs de famille des douze tribus d'Israël qui estoient descendus en Egypte, le nombre de six cent mille combattans, sans conter les femmes, les enfans au dessous de 20 ans, les vieillards au dessus de 60, & les personnes inutiles: Car on peut prouver qu'il en pouvoit sortir un beaucoup plus grand nombre d'une seule famile, en supposant que Joseph par exemple qui s'estoit marié à l'âge de 20 ans, ait eu 10 enfans mâles jusqu'à l'âge de 30 ans; que ses dix enfans s'estans mariez à la mesme âge ayent eu pareil nombre d'enfans jusqu'à l'âge de 30 ans, & quoy qu'ils en pussent avoir un grand nombre par-de-là les 30 ans, & qu'ils vécussent long-temps pour pouvoir voir les enfans de leurs enfans, neanmoins nous ne les faisons feconds que jusqu'à cet âge, & qu'ils mouroient tous à l'âge de 80 ans, afin de ne rien admettre d'extraordinaire dans cette preuve. Il se trouve que la premiere generation des dix enfans de Joseph, en aura produit 100, trente ans apres: la seconde, 1000 trente ans apres: la troisiéme, 10000 trente ans apres: la quatriéme 100000, la cinquiéme un million, la sixiéme cent millions; & toutefois les 210 ans ne sont pas encore accomplis, & à la fin il y auroit un milliard cent millions d'enfans de la

ſeule famille de Joſeph, d'où retranchant ce qu'il vous plaira pour les morts, les enfans, les femmes & les vieillards, il reſtera encore plus de cinq cent milions de combattans d'une ſeule famille, que ce ſeroit-ce donc ſi l'on en prenoit de 70 familles? Ainſi bien loin d'eſtre obligez de recourir au miracle pour prouver ce nombre d'enfans d'Iſraël qui ſortit de l'Egypte, à la fin de 210, c'eſt au contraire un miracle de ce qu'il n'en ſortit pas davantage, & il fallut que la cruauté des Egyptiens & la miſere de ce peuple fut bien grande pour avoir eſté opprimez & reduits à un ſi petit nombre, en comparaiſon de celuy qui pouvoit venir & ſubſiſter naturellement.

III. Exemple.

Un Roy ayant fait pluſieurs conqueſtes ſur ſes voiſins pendant la Guerre, demeure d'accord dans le Traitté de Paix qu'il rendra 40 Villes ou Châteaux, à condition que pour le dédommager des frais de la guerre on luy payera un denier pour la premiere ville, deux pour la ſeconde, quatre pour la troiſiéme, huit pour la quatriéme, & ainſi toûjours en doublant: on demande à quelle ſomme montera le payement de ces 40 villes ou châteaux? Il faudra 1099511627775 deniers, qui eſtant reduits en écus (en diviſant ce nombre par 720, qui eſt ce que contient de deniers un écu de 60 ſols, à 12 deniers le ſol,) font la ſomme de 1527099483 écus, c'eſt à dire un milliard cinq cens vingt-ſept millions, quatre-vingt dix-neuf mille, quatre cens quatre-vingt trois écus: ou en livres, 4581308449 livres, & cet argent eſtant mis à intereſt à 5 pour 100, ou au denier 20, produiroit 76354974 livres, c'eſt à dire 76 millions, 374 mille, 974 livres de rente annuelle.

IV. Exemple.

Didon s'eſtant refugiée en Afrique demanda aux habitans du pays, ſeulement autant de terre qu'il en faudroit pour ſemer un grain de bled, avec ce qui en pourroit venir pendant huit ans. Chaque grain n'occupant qu'un pouce de terre, & n'en produiſant que 40 chacun, à la fin des huit années ce grain en avoit produit 39736000000000, & pour le ſemer la derniere des 8 années, il fallut 9934000000 pouces de terre. Et comme en mille pas en quarré il y a 64000000 de pouces; diviſant le premier nombre 9934000000 par le ſecond 64000000, il luy fallut 153 milles pas en quarré qui font plus de 73 lieuës en quarré.

Avant que de quitter ces progreſſions, il faut donner la methode de trouver les derniers nombres des progreſſions, ſans eſtre obligé de mettre les premiers & ceux du milieu de ſuite. Pour cela il faut ſçavoir que tout nombre qui ſe multiplie luy-meſme en produit un autre qui eſt autant éloigné de luy que celuy qui ſe multiplie eſt eloigné de l'unité. Par exemple dans la progreſſion double

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, &c.

16 ſe multipliant produit 256, qui eſt autant éloigné de luy, qu'il l'étoit

de l'unité. Car comme 16 estoit au cinquiéme lieu apres l'unité, ayant entre luy & l'unité, 2, 4, 8, ainsi 256 est au cinquiéme lieu apres 16, ayant entre luy & 16, 32, 64, 128. Ainsi de tous les autres en quelque progression Geometrique que ce soit. Et afin de connoistre mieux en quel rang vient le nombre produit, on dresse ces deux progressions naturelle & Geometrique l'une sur l'autre, en sorte que la naturelle ne commence l'unité que sur le second de la Geometrique, ainsi

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, &c.

Le nombre qui se multiplie soy-mesme en la progression Geometrique, fait un produit qui est sous un nombre de la progression naturelle, qui est double de celuy qui s'est multiplié. Par exemple, 16 se multipliant, produit 256, qui est sous 8, qui est double de 4, sous lequel estoit 16.

Et un nombre en multipliant un autre, fait un produit qui est dessous un nombre qui est composé des deux qui estoient sur les deux qui se font multipliez, comme 8 multipliant 16, produit 128 qui est sous 7, parce que 7 est composé de 3 & de 4, sous lesquels estoient 8 & 16. C'est donc assez d'avoir les 5 ou 6 premiers nombres de la progression Geometrique telle qu'elle soit, pour pouvoir produire tous les autres plus grands sans écrire ceux du milieu. Car si par exemple on veut le neufiéme nombre de la progression double Geometrique, & que vous ayez devant les yeux les 6 premiers nombres de cette progression, vous aurez le 9, en multipliant ou 64 par 8, parce que ces deux nombres sont sous 6 & 3 qui font 9, ou 32 par 16, qui sont sous 5 & 4; & il viendra 512, &c.

CHAPITRE XVII.

Des Combinaisons ou divers changemens que peuvent avoir plusieurs choses entr'elles.

NOus avons dit que la progression des Combinaisons se faisoir par la multiplication mutuelle des nombres de la progression naturelle, & de leurs produits, ce qui fait monter ces Combinaisons à de bien plus grands nombres que ne font les progressions Geometriques.

I. Exemple.

Les douze Apôtres de JESUS-CHRIST ayant disputé devant luy de la preference, il leur fit entendre que celuy qui voudroit estre le premier seroit le dernier, & le dernier le premier. Supposons qu'en suitte de cette leçon d'humilité, chacun voulut ceder la premiere place, la seconde & la troisiéme à son compagnon, & qu'ainsi ils resolurent de ne demeurer jamais ensemble dans une mesme disposition de lieux, on demande combien ils pouvoient changer de place, en sorte qu'ils se rencontrassent toûjours les

uns à l'égard de tous les autres en differente ſituation ? Réponſe. 479001600, c'eſt à dire quatre cens ſoixante dix-neuf millions mil ſix cens fois.

Et ſi nous ſuppoſons qu'ils vouluſſent toûjours faire l'honneur à Pierre de le laiſſer le premier, comme en effet il ſemble qu'ils l'ayent ainſi fait, puiſque que quand les Evangeliſtes les ont tous nommez, ils ont bien changé la place des autres, mais non celle de Pierre qu'ils ont non ſeulement mis le premier dans l'ordre, mais à qui ils ont ajoûté la qualité de premier. Comme en S. Mathieu chap. 10. *Le premier Simon qui eſt appellé Pierre, & André ſon frere, Iacques &c.* En S. Marc, chap. 3. *Le premier fut Simon à qui il donna le nom de Pierre, Iacques fils de Zebedée & Iean, &c.* Dans les Actes des Apôtres, Saint Luc commençant à les nommer dit au premier Chapitre. *Pierre, Iean, Iacques, &c.* Suppoſant, diſ-je, que les autres laiſſaſſent toûjours la premiere place à Saint Pierre, il n'y en avoit qu'onze (apres l'election de S. Mathias en la place de Judas) qui fiſſent des changemens qui eſtoient au nombre de 39916800, c'eſt à dire trente-neuf millions neuf cens ſeize mille huit cens. Comme auſſi on peut changer ce vers Latin en autant de manieres.

Sol, lux, pax, fax, lex, Rex, fons, mons, ver, roſa, flos, ros.

Parce qu'encore qu'il y ait douze mots, celuy de *Roſa* doit eſtre immobile pour faire la cadence du Vers. Mais ce vers François peut eſtre changé en 479001600 manieres.

Foy, loy, Roy, Ciel, mer, pont, mont, fort, ſort, lot, mort, port.

II. Exemple.

On auroit peine à croire que huit Enfans de Chœur pûſſent eſtre tellement diſpoſez dans leurs places au Chœur differemment trois fois par jour, à Matines, à la Meſſe, & à Veſpres, qu'on employeroit trente-ſept ans & trente-ſix jours à faire ces changemens differens. Et neanmoins il eſt conſtant que huit choſes ſouffrent quarante mille trois cens vingt changemens, & comme il s'en feroit 3 par jour, en diviſant 40320 par 3, il y en auroit pour 13440 jours, qui font 37 ans 45 jours, & ôtant les 9 jours des années de biſſexte, reſte 37 ans 36 jours, pendant leſquels il faudroit chaque jour faire trois changemens.

III. Exemple.

Mais ce que nous allons dire eſt bien plus ſurprenant. Si on donnoit à écrire les noms de 24 perſonnes qui n'occcuperoient que deux lignes, & qu'on en put mettre 1440 lignes en chaque feüille de papier, c'eſt à dire y mettre ces 24 noms 720 fois, & que chaque rame de papier fut tellement preſſée & battuë qu'elle ne fut pas plus épaiſſe qu'un pouce, c'eſt à dire la douziéme partie d'un pied de Roy ; il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire ces 24 noms differens dans tous les changemens & differentes diſpoſitions qu'ils peuvent recevoir, qu'il n'en faudroit les unes ſur les autres depuis le centre de la terre juſqu'au firmament ; car il n'y a

que 2886264000000, c'eſt à dire 28 milliards de milliards, 862 milliards, 640 millions de pouces du centre de la terre aux étoilles, & il faudroit 1751245560364553942, c'eſt à dire un quintilion, 751 quadrillons, 245 trilions, 560 bilions, 364 milions, 553 mille, 942 rames de papier & plus, pour écrire les 620448401733239439360000, c'eſt à dire 620 ſextilions, 448 quintilions, 401 quadrilions, 733 trilions, 239 bilions, 493 millions, 360000 mille changemens que peuvent recevoir ces 24 noms, parce que chaque rame de papier contenant 500 feüilles, & chaque feüille 720 changemens, chaque rame de papier contiendroit 360000 de ces changemens. Or diviſant les 24 nombres 620, &c. des changemens des 24 noms, par celuy que contiendroit chaque rame, il vient 1751245560364553942 $\frac{2}{3}$, qui eſt un nombre plus grand que celuy des pouces qu'il y a depuis le centre de la terre juſqu'au firmament, de 1751216697724553942. C'eſt à dire que quand l'eſpace qui eſt depuis le centre de la terre juſqu'aux étoilles, contiendroit encore un quintilion, ſept cens cinquante-un quadrilions, deux cens ſeize trilions, ſix cens nonante-ſept bilions, ſept cens vingt-quatre milions, cinq cens cinquante-trois mille, neuf cens quarante-deux pouces, qui eſt un nombre dix-ſept mille cinq cens fois plus grand que n'eſt cet eſpace, les changemens des 24 noms ſuffiroient pour le remplir, ce qu'on auroit peine à concevoir ſi la démonſtration n'en convainquoit l'eſprit, & pour ainſi dire les yeux, par le moyen de l'Arithmetique. C'eſt un grand bien de pouvoir ſans peine & ſans frais faire ces démonſtrations avec la plume; car s'il en falloit venir à l'experience, tous les Roys & Princes du monde ne pourroient payer le papier quand la rame n'en coûteroit que 20 ſols, & cent mille perſonnes employées pour écrire ces changemens, quand elles en écriroient chacune une rame par ſemaine en écrivant nuit & jour, en ſorte que chaque perſonne remplît plus de 71 feüilles par jour, qui feroient cinq millions deux cens mille rames par an, ſeroient 336047223141, c'eſt à dire trois cens trente-ſix miliards, quarante-ſept milions, deux cens vingt-trois mille, cent quarante-un an, à écrire ces vingt-quatre changemens; & ſi on leur donnoit à chacun deux cens livres par an, pour leur ſalaire, nourriture, veſtement, logement, plume & ancre, ce ſeroit 20000000, vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier par an, & cela à continuer pendant trois cens trente-ſix milliards, quarante-ſept millions, deux cens vingt-trois mille, cent quarante-un années, qui feroient la ſomme de ſix cens nonante-ſix quintilions, ſix cens ſept quadrilions, ſix cens vingt trilions, deux cens trente-un bilions, cinq cens trente-deux millions de livres d'argent.

Pour montrer que ce n'eſt point icy une pure imagination, nous allons mettre la progreſſion des combinaiſons des dix premiers nombres, qui ſervira d'une démonſtration generale pour tous les nombres poſſibles qui ſe multiplient de ſuite.

Les premiers nombres de la progreſſion naturelle repreſentent les choſes

qui peuvent eſtre changées ; Les ſeconds montrent la quantité des changemens qui leur arrivent.

Choſes.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.
Changemens.	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	&c.

Pour abreger la peine d'écrire les multiplications entieres de ces nombres, on peut en commençant par 6, mettre 1 au lieu de 6, puis multiplier les ſuivans de ſuite, une fois 7, fait 7 | 7 fois 8, fait 56 | 9 fois 56, fait 504 | 10 fois 504, fait 5040 | &c. Et pour trouver par ce moyen la ſomme des changemens deſdits nombres 6, 7, 8, 9, 10, &c. il faut multiplier leurs produits, 1, 7, 56, 504, 5040, &c. par 720. (comme ſi c'eſtoient des écus multipliez par la ſomme de leurs deniers qui eſt 720.)

	6	7	8	9	10	
		5040	40320	362880	3628800	&c.
& il viendra	720	720	720	720	720	
	1	7	56	504	5040	

CHAPITRE XVIII.

Avis ſur les Combinaiſons.

IL eſt fort inutile d'appliquer cette doctrine des Combinaiſons à des changemens bizarres, & qui ne produiſent que des choſes ſuperfluës & extravagantes ; comme par exemple, d'aller chercher combien il peut y avoir d'Anagrammes dans un nom composé de dix ou douze lettres ; combien on peut faire de mots des divers arrangemens des vingt-quatre lettres de l'Alphabet, puiſqu'on ſçait bien qu'il y a une infinité de combinaiſons, ou dans ces changemens de dix ou douze lettres, ou dans les vingt-quatre de l'alphabet qui n'ont aucun ſens, & que par exemple les quatre premieres lettres de l'Alphabet dans leur ordre ordinaire, ou en telle autre plus grande quantité qu'on les prenne, ne font aucun mot ſignificatif en quelque langue que ce ſoit.

De meſme d'aller chercher tous les Chants poſſibles qui ſe peuvent rencontrer dans l'étenduë d'une Octave, ou par deſſus, puiſqu'on ſçait qu'il n'y a que les quintes juſtes & au deſſous, dont les notes differentes puiſſent admettre des chants ou intervalles raiſonnables ; & que par de-là on n'entonne point ny ſixte majeure, ny le triton, qui ſe rencontreroit dans la ſixte mineure, ny de ſeptiémes, ny de neufviémes, ny de dixiémes, ny d'onziémes, ny autre intervalle au deſſus d'une octave, &c.

Il eſt bon de ſçavoir que quand il y a des lettres, notes, ou autres choſes qui ſont repetées, qu'elles diminuent le nombre de leurs combinaiſons autant

autant de fois qu'elles sont repetées, en le divisant par ce nombre. Par exemple, si dans un nom de cinq lettres il y en a deux repetées comme dans *Maria* ou l'*a* est deux fois ; il faudra diviser le nombre des changemens de cinq lettres qui est 120, par 2 le nombre des lettres repetées, & il viendra 60, c'est à dire qu'un nom de cinq lettres qui en a deux semblables ne reçoit que 60 changemens, au lieu des 120 qu'il recevroit si toutes les lettres estoient differentes.

Second Avis touchant les suppositions des Mathematiciens.

QUoyque les Mathematiciens puissent supposer ce qu'il leur plaist, & que leurs suppositions n'estant pas déraisonnables, ayent des suites & des consequences infaillibles ; il faut neanmoins remarquer, que les effets de ces suppositions sont ou contingens, ou necessaires, ou mixtes. Nous appellons effets contingens qui peuvent ou arriver ou n'arriver pas, comme dans la production & multiplication des grains ou au quarantiéme, ou au soixantiéme, ou au centiéme ; il se peut faire que les mulots, la secheresse, ou la trop grande pluye, la nielle & mille autres accidens détruiront cette production. Telle est aussi celle des generations que nous avons tantost supposées de la famille de Joseph, où il a pû arriver que beaucoup n'auront point eu de mâles qui ayent vécu jusqu'à l'âge supposé, ou qui n'auront point eu le nombre d'enfans supposé, &c.

Les necessaires sont ceux qui ne dépendent pas des causes naturelles, comme la combinaison des changemens que nous avons dit que peuvent recevoir, ou huit choses, ou douze, ou vingt-quatre, ou tant qu'il vous plaira, parce qu'encore qu'on ne mette pas en effet ces changemens, neanmoins rien ne peut empescher qu'on ne les puisse mettre. Les mixtes sont ceux qui peuvent arriver en effet, mais qui moralement n'arrivent pas. Comme sont les suppositions qu'on fait sur les Genealogies qui remontroient par la proportion double, s'il ne se faisoit point d'alliances ; mais comme il est moralement impossible que les familles d'une mesme ville, ou mesme d'un Royaume, ne s'allient entre elles, cette progression double est interrompuë.

Or il est évident que les Genealogies montent par progression double, car un homme est fils d'un pere & d'une mere, & ce pere & cette mere ont chacun leur pere & leur mere, ce qui fait déja les trois premiers termes de la progression double, 1, 2, 4. Et ces quatre personnes ayant chacun leur pere & leur mere, ce sont 8, & ces huit chacun leur pere & leur mere, ce sont 16, & ces seize en ont 32, pour pere & pour mere, ces trente-deux en ont 64, & toûjours ainsi en remontant ; tellement qu'un homme qui remontroit à sa dixiéme generation auroit 1024 personnes, qui ayant chacun leur pere & leur mere feroient le nombre de 2048 personnes, qu'il contenoit en sa ligne droite ascendante.

Mais aussi il est evident qu'il se fait necessairement des alliances qui di-

minuent cette progreſſion, & à peine monte-t'on juſqu'à la cinquiéme generation dans les familles ordinaires, & preſque jamais dans la troiſiéme dans les familles illuſtres, que ces progreſſions ne ſoient interrompuës par les alliances, comme on en peut voir l'exemple dans tous les Princes de l'Europe, & principalement en Monſeigneur le Dauphin, Fils de Loüis XIV. & de Marie-Thereſe, glorieuſement Regnants.

On doit mettre au rang de ces progreſſions mixtes, les mécontes qui arrivent en ceux qui reglent leurs dépenſes par leurs revenus, & les plaintes que font les ſujets contre leurs Princes ou leurs Miniſtres, ſur l'adminiſtration des Finances, qui ne peut eſtre tellement reglée qu'elle ne ſoit interrompuë par une infinité d'accidens.

CHAPITRE XIX.

DES PROPORTIONS en general.

C'Eſt principalement le propre des Proportions, par deſſus toutes les puiſſance des nombres, de découvrir ceux qui ſont inconnus

Quoyque nous ayons déja beaucoup de fois parlé des differentes ſortes de proportions, il eſt neceſſaire de les retoucher icy ſommairement.

I. Il y en a de ſimples qu'on appelle ſimple rapport ou comparaiſon, quand on compare un nombre ſeul à un autre, comme 2 à 3. Il y en a de compoſées, quand on en compare pluſieurs à pluſieurs, & celles-là s'appellent proprement Proportion, comme quand on dit, ainſi que 2 eſt à 3, ainſi 4 eſt à 6, & 6 à 9, &c.

II. Cette ſeconde ſorte de Proportion eſt diviſée en trois autres ſortes particulieres. La premiere s'appelle Arithmetique, où il y a meſmes diſtances, comme 2 à 3, ainſi 4 à 5. La ſeconde s'appelle Geometrique, où il y a meſme raiſon ou proportion, c'eſt à dire où un nombre en contient autant de fois un autre ou eſt contenu dans l'autre, que le troiſiéme contient ou eſt contenu dans le quatriéme. Comme 3 à 2, ainſi 6 à 4; c'eſt à dire que de meſme que 3 contient 2 une fois & ſa moitié, ainſi 6 contient 4 une fois & ſa moitié. La troiſiéme s'appelle Harmonique, dans laquelle trois nombres ſont tellement diſpoſez, qu'il y a meſme proportion entre les deux extrêmes, que des deux diſtances des deux extrêmes avec le milieu, comme 6, 4, 3. Car de meſme que 6 eſt double de 3, ainſi la diſtance de 6 à 4 qui eſt 2, eſt double de la diſtance de 4 à 3 qui eſt 1. Nous ne parlerons pas davantage de cette troiſiéme, non plus que de la premiere Arithmetique, dont nous avons aſſez parlé dans les progreſſions.

III. La Geometrique (ſans conter la proportion d'égalité) eſt de cinq ſortes, qui ont chacune une infinité d'eſpeces.

La premiere eſt celle qui contient une fois & une partie; comme 3 à 2, 4 à 3, &c.

La seconde qui contient une fois & plusieurs parties, comme 5 à 3, 7 à 5, &c.

La troisiéme est celle qui contient plusieurs fois précisement, comme 2 à 1, 6 à 2, 8 à 2, &c.

La quatriéme qui contient plusieurs fois & une partie, comme 5 à 2, 7 à 3, 9 à 2, &c.

La cinquiéme qui contient plusieurs fois & plusieurs parties, comme 11 à 3, 13 à 5, &c.

C'est à dire que quelques nombres qu'on puisse donner, ils ont l'un à l'autre une de ces cinq Proportions.

CHAPITRE XX.

Regles des Proportions.

POur trouver en quelle Proportion sont les nombres proposez, il les faut reduire à leurs moindres termes, comme il a esté enseigné dans le II. Chapitre du III. Livre : par une division alternative, jusqu'à ce qu'on ait trouvé leur commune mesure qui les divise sans reste ; ou qu'on soit descendu à l'unité, auquel cas ces nombres quelque grands qu'ils soient, sont les moindres ou premiers de leur proportion.

LA REGLE DE TROIS, ou de Proportion.

CEtte Regle enseigne à trouver un nombre proportionnel aux nombres precedens, soit qu'il n'y en ait que deux, ou trois, ou quatre, ou tant qu'on voudra, ausquels il faille ajoûter un troisiéme, ou un quatriéme, &c. soit que la proportion des nombres donnez soit connuë ou inconnuë : soit que les nombres augmentent ou diminuent. Nous allons donner des Exemples de tous ces Cas, & les moyens de

Trouver un troisiéme Nombre proportionnel à deux autres donnez, sans mesme sçavoir quelle est la proportion.

COmme si à 40 & 60 on veut ajoûter un troisiéme en proportion : Il faut multiplier 60 par luy mesme, & diviser le produit 3600 par 40, il viendra 90 au quotient, qui sera le troisiéme proportionnel, 40, 60, 90.

Trouver ce troisiéme inconnu quand on sçait la proportion.

IL faut multiplier le second nombre par le plus grand terme de la proportion, & diviser le produit par le plus petit terme de la proportion, le quotient sera le troisiéme qu'on cherche. Exemple. 40 & 60, sont dans

la proportion de 2 à 3, multipliant 60 par 3, il vient 180, qui estant divisé par 2 donne 90 pour troisiéme, 40, 60, 90.

CHAPITRE XXI.

Trouver un quatriéme qui ait mesme proportion avec le troisiéme, que le second avec le premier, quoyque la proportion soit inconnuë.

Multipliez le troisiéme par le second, divisez le produit de cette multiplication par le premier, & le quotient sera le quatriéme que vous cherchez. Exemple. Trois rames de papier coûtent 18 livres, combien en couteront 9? 18 fois 9 font 162, qui divisez par 3 donnent 54 pour le quatriéme nombre. 3, 18, 9, 54.

Trouver ce quatriéme quand la proportion est connuë.

Multipliez le troisiéme nombre par le plus grand terme de la proportion, & divisez le produit par le plus petit terme de la proportion, le quotient sera le quatriéme. Si 15 donne 20, combien 30, en la proportion de 3 à 4; 30 multiplié par 4 fait 120, qui estant divisé par 3 donne 40 pour quatriéme terme, 15, 20, 30, 40. De mesme en proportion sextaple, si 3 donne 18, 9 donnera 54.

CHAPITRE XXII.

Trouver un troisiéme ou quatriéme proportionnel à 2 ou 3 precedens en diminuant.

Cela se fait par la mesme regle que ceux qui s'augmentent, sçavoir en multipliant le dernier par soy-mesme, quand il n'y en a que deux, ou par son voisin precedent quand il y en a trois, & divisant le produit de cette multiplication par le premier. Et quand on sçait la proportion, multipliant le dernier par le plus petit terme de la proportion, & divisant par le plus grand terme. Si 24 donne 16, combien 15? (10. Si 16, 12; quel sera le troisiéme? 9.

$$\frac{\overline{\;16\;}\;\;240}{24}\;(10 \qquad \frac{\overline{\;12\;}\;\;144}{16}\;(9$$

La proportion de 16 à 12 estant connuë, c'est à dire de 4 à 3: on aura le troisiéme à 16 & à 12, en multipliant 12 par 3, & il viendra 36, qui estant divisé par 4 donnera 9 pour troisiéme. Et de mesme sçachant la propor-

tion de 24 à 16, qui eſt de 3 à 2; on aura le quatriéme proportionnel à 15, en multipliant 15 par 2, & il viendra 30, qui eſtant diviſé par 3 donnera 10 au quotient, pour quatriéme. Comme ces Exemples ſont en proportion ſurparticuliere, c'eſt à dire dont les moindres termes ne ſont diſtans que de l'unité, le quotient de la diviſion eſt juſtement le quatriéme terme. Mais de peur qu'on ne ſe trompe dans les autres proportions, voicy la

Regle generale pour operer dans la Regle de Trois, par les moindres termes de la proportion.

SI les termes de la proportion vont en augmentant comme 8, 12, 18. Apres avoir reduit les deux premiers nombres à leurs moindres termes, par exemple 8 & 12, à 2 & à 3; diviſez le troiſiéme par le moindre terme premier, par exemple 18 par 2, & ajoûtez au troiſiéme nombre, par exemple à 18, le quotient 9, autant de fois que les deux moindres termes de la proportion ſont éloignez l'un de l'autre. Or 2 & 3 qui ſont les moindres termes de cette proportion, ne ſont éloignez que de l'unité, & par conſequent il ne faut ajoûter 9 à 18 qu'une fois, & il viendra 27 pour le quatriéme, 8, 12, 18, 27. Ainſi dans la proportion de 4 à 7, ſi l'on propoſe 32, 56 & 96: apres avoir reduit 32 & 56 à leurs moindres termes 4 & 7, & diviſé 96 par 4; on ajoûtera à 96 le quotient 24 trois fois, qui ſont 72, parce que 4 & 7 ſont éloignez de 3, & le quatriéme terme ſera 168. 32, 56, 96, 168.

Si les termes de la proportion vont en diminuant comme 27, 18, 12. Apres avoir reduit les deux premiers nombres à leurs moindres termes 3 & 2, diviſez le troiſiéme 12 par le plus grand terme de la proportion 3, & il viendra 4, que vous retirerez du troiſiéme 12 autant de fois que les deux moindres termes de la proportion ſont éloignez l'un de l'autre, c'eſt à dire en cet exemple une fois, il viendra 8 pour le quatriéme nombre 27, 18, 12, 8. Ainſi dans cette proportion de 7 à 4; 168, 96, 56; apres avoir reduit les deux premiers nombres 168 & 96 à 7 & à 4, & diviſé 56 par 7; vous retirerez trois fois le quotient 8 de 56, & il reſtera 32 pour le quatriéme nombre; 168, 96, 56, 32.

CHAPITRE XXIII.

LA REGLE DE TROIS en Fractions.

SI l'on propoſe trois nombres en Fractions, comme $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{4}$; pour avoir le quatriéme il faut multiplier les deux derniers numerateurs 5 & 3 par le premier dénominateur 3, & il viendra 45, car 3 fois 5 font 15, & 15 fois 3 font 45: puis il faut multiplier les deux derniers dénominateurs 6 & 4 par le premier numerateur 2, en diſant 2 fois 6 font 12, & 12 fois 4 font 48,

enfin on reduira ces deux produits 45 & 48 à leurs moindres termes, qui seront $\frac{15}{16}$ pour le quatriéme nombre de la proportion. Ainsi $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{15}{16}$.

La Regle de Trois en Entiers & Fractions.

S'Il y a des Entiers & Fractions, en sorte qu'il y ait quelqu'un des 3 nombres qui soit entier, & qu'un autre soit mélé d'entier & de fraction: On reduira tout en Fractions, sçavoir l'Entier en luy soucrivant une unité pour dénominateur, & reduisant les entiers joints à des fractions, tous en fractions. Et quand tout sera en fractions, on operera comme en la regle precedente. Comme si on propose 3, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$; on les reduira ainsi $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{8}{3}$; puis on operera comme en la regle precedente, sçavoir en multipliant les deux derniers numerateurs 7 & 8, par le premier dénominateur 1, & il viendra 56; & multipliant aussi les deux derniers dénominateurs 2 & 3, par le premier numerateur 3, & il viendra 18; enfin on reduira 56 & 18 à leurs moindres termes; & il viendra $3\frac{1}{9}$, car en 56, 18 y est trois fois, & reste $\frac{2}{18}$, c'est à dire $\frac{1}{9}$: ainsi l'on aura les quatre termes, 3, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{9}$; c'est à dire que si dans un partage on avoit donné à trois hommes differemment, à l'un trois écus, à l'autre trois écus & demy, c'est à dire dix livres dix sols, au troisiéme deux écus & deux tiers d'écu, c'est à dire huit livres, & qu'on voulut donner au quatriéme autant à proportion, au dessus du troisiéme, que le second en auroit eu au dessus du premier, il luy faudroit donner trois écus & un neuviéme d'écu, c'est à dire neuf livres six sols huit deniers.

Ce qui seroit arrivé de mesme si l'on avoit tout reduit en deniers; & c'est ainsi qu'on reduit en fractions où il y a des especes differentes, des livres, des sols, & des deniers, reduisant tout en la plus petite fraction qui se rencontre, comme est icy celle des deniers. Et les quatre termes de la proportion seroient tels. 2160 deniers, 2520 deniers, 1920 deniers, 2240 deniers.

équivalant en deniers à celle-cy.	9 livres.	10 liv. 10 sols.	8 liv.	9. l. 6. s. 8.

REGLE DE TROIS RENVERSE'E,
Où le premier terme à mesme proportion avec le troisiéme, que le quatriéme inconnu doit avoir avec le second.

IL faut multiplier le premier par le second, & diviser le produit par le troisiéme, le quotient sera le quatriéme. Exemple. 24, 12, 16 ? (18.

Operation
```
 24        2
 12      288   (18
----      16
 288      16
```

CHAPITRE XXIV.

REGLE DE COMPAGNIE.

Qui partage un nombre donné en tant de parties qu'on veut proportionnelles à d'autres en pareil nombre.

ASsemblez en une somme les parties ou proportions proposées : Puis avec cette somme divisez le nombre donné, & multipliez le quotient par chacune des parties ou proportions proposées, le produit de chaque multiplication sera une des parties données. Cette Regle est de grand usage dans les proportions de la Musique. Exemple. Diviser le nombre 369 en deux portions qui soient en proportion double. Ayant assemblé les deux termes de la proportion double 2 & 1 qui font 3, avec 3 je divise 369, il vient au quotient 123, qui estant multiplié separément par les deux termes de la proportion 1 & 2, il y a pour le moindre 123, & pour le plus grand 246; qui sont tous deux en proportion double & font le nombre donné 369. II. Ex. 600, à diviser en trois termes qui ayent entre eux la proportion double, la sesquialtere, & la sesquitierce, je joins leurs termes 1, 2, 3, 4, qui font 10, avec 10 je divise 600, il vient 60, qui estant multiplié separément par 1, par 2, par 3, & par 4, donne pour le premier 60, pour le second 120, pour le troisiéme 180, & pour le quatriéme 240, qui tous quatre font le nombre 600, & sont entre eux dans les proportions requises, &c.

Autre maniere par la Regle de Trois.

SUpposé qu'on veüille partager un nombre donné en trois parties proportionnelles à trois autres données. On fera trois fois la Regle de Trois. On assemblera en une somme les trois parties, on mettra pour premier terme cette somme, pour second à chaque operation une des parties données, & pour troisiéme le nombre donné à partager ; on pratiquera la Regle de Trois droite, c'est à dire qu'on multipliera le troisiéme qui sera le nombre donné, par le second qui sera une des parties données, puis on divisera le produit de cette multiplication par le premier terme, c'est à dire par la somme des parties données, & le quotient de chaque operation sera une des parties proportionnelles qu'on cherche. Exemple. 18 à partager en trois nombres proportionnels à 4, 2, & 3.

Ayant assemblé 4, 2, & 3 qui font 9, je mets toûjours 9 à la premiere place, & un des trois nombres 4, 2, & 3 à la seconde, & toûjours 18 à la troisiéme, & j'opere ainsi.

1ere, Oper. 9, 4, 18? 8	2e. Op. 9, 2, 18? 4	3e. Op. 9, 3, 18? 6	& 8, 4 & 6 font 18.
4	2	3	
72 (8	36	54	
9	9	9	

On peut appliquer ces nombres à des choses.

Exemple I.

Trois associez ont mis dans une bourse commune, l'un 4000 livres, l'autre 2000, & l'autre 3000, qui font 9000 livres; ils ont gagné neuf autres mille livres, & ainsi ils ont à partager 18000 livres, & doivent prendre chacun à proportion de ce qu'il a mis. On trouvera que celuy qui aura mis 4000 livres, en doit retirer 8000 livres, celuy qui en aura mis 2000 en aura 4000, & celuy qui en aura mis 3000 en aura 6000.

Exemple II.

Un vase, une fontaine, ou un muids, a trois ouvertures differentes fermées en bas: la plus grande estant ouverte vuide toute l'eau en deux heures, la seconde ouverte la vuide en trois heures, & la troisiéme en six heures, en combien de temps toute l'eau peut-elle estre vuidée par les trois ouvertures? Reponse. Puisque la premiere vuide toute l'eau en deux heures, elle en vuidera la moitié en une heure; la seconde en vuidera le tiers en une heure, & la troisiéme un sixiéme; Or la moitié, le tiers & un sixiéme, font un entier, donc toute l'eau sera vuidée en une heure par les trois ouvertures. On aura la mesme solution de toutes les autres questions de mesme nature.

Exemple III.

Trois ouvriers entreprennent separement un ouvrage, par exemple, un fossé, un puits, ou l'Impression d'un Livre; l'un le peut faire en six mois, l'autre en neuf, & le troisiéme en douze: s'ils travaillent tous trois ensemble, en combien de temps l'auront-ils achevé? l'un en un mois en fait la sixiéme partie, l'autre la neufviéme, l'autre la douziéme, qui font $\frac{13}{36}$; parce que 36 est le nombre qui a sans fraction son sixiéme qui est 6; son neufviéme qui est 4, & son douziéme qui est 3. Or 6, 4 & 3 font 13. Pour sçavoir donc en combien de temps les trois ouvriers feront l'ouvrage entier, il faut ainsi faire la Regle de Trois, & dire si 13 donnent un mois de trente journées, de 12 heures chacune, combien donneront 36? Si 13, 360 heures, combien 36? 996, $\frac{12}{13}$; c'est à dire 2 mois, 23 jours, & $\frac{12}{13}$ d'heures, ou 83 journées de 12 heures chacune, & pres d'une par dessus.

CHAPITRE XXV.

Regle d'Alliage, Mélange, ou Mixtion.

CEtte Regle enseigne à connoistre le prix de differentes choses mêlées. Elle est necessaire aux Orfévres, Monnoyeurs, & Fondeurs, pour l'alliage des métaux; aux Marchands de grain & de vin, de laine & de soye, &c.

Il y

Il y a deux especes d'alliage, la premiere fait seulement le mélange de differentes choses, & en cherche le prix. L'autre demande une quantité déterminée, avec un certain prix des choses mélées. Ces deux especes ont chacune leurs Regles, que nous expliquerons par des Exemples.

Regle & Exemples, de la premiere espece d'Alliage.

POur sçavoir le prix des choses mélées, on multiplie chaque chose par son prix: on ajoûte les produits de cette multiplication en une somme, on divise cette somme par le nombre des choses mélées, & le quotient est le prix du mélange.

Exemple I.

On méle 8 septiers de froment à 6 livres le septier, avec 12 septiers de segle à 3 livres le septier; quel sera le prix du mélange ou méteil? Multipliant 8 par 6, & 12 par 3, qui sont les nombres & les prix du froment & du segle, il vient 48 & 36 qui font 84, lesquels estant divisez par 20 qui est le nombre des choses, c'est à dire des 8 & 12 septiers de froment & de segle, il vient 4 livres 4 sols, qui est le prix du septier de méteil.

Exemple II.

Un Orfévre a de l'argent de quatre sortes d'alloy, sçavoir à 18, à 19, à 23, & à 36 livres le marc: Il les méle ensemble, c'est à dire qu'il met un marc de chaque titre, quel est le prix de l'alliage? Il n'y a point icy de multiplication à faire, parce qu'il n'y a qu'un marc de chaque alloy: Il faut seulement assembler en une somme les differens prix, 18, 19, 23, 36, qui font 96, qu'on divisera par 4 qui est le nombre des choses, & il viendra 24, qui sera le prix du marc de l'alliage.

Exemple III.

On fait un mélange de froment à 30 sols le boisseau, de segle à 24 sols, & d'orge à 20 sols, à quel prix revient le boisseau de ce mélange? assemblez 30, 24 & 20, qui font 74, qu'il faut diviser par 3 le nombre des choses, il vient 24 sols & 8 deniers pour le prix du boisseau de ce mélange.

Regle & Exemples de la seconde espece d'Alliage, suivant la Methode commune.

QUand on propose une quantité déterminée, & pour le nombre des choses, & pour le prix composé du mélange de plusieurs choses de differens prix, pour faire ce mélange il faut chercher ce qu'on doit prendre déterminément d'un chacun des prix differens, afin d'avoir un prix moyen demandé. Ainsi le prix moyen proposé doit en avoir necessairement de plus grands & de moindres que luy. Comme si l'on proposoit à prendre

100 boisseaux mélez de froment à 30 sols le boisseau, de segle à 24 sols, & d'orge à 20; & que neanmoins le boisseau (qui dans ce mélange vaut 24 sols 8 deniers, comme nous venons de voir) ne valût que 22 sols, combien en faudroit-il prendre d'un chacun pour faire les 100 boisseaux à 22 sols le boisseau, qui feroient la somme de 2200 sols ou 110 livres? De mesme de toutes les autres questions où il y a plus ou moins de prix differens. Et toutes ces questions se reduisent à deux cas, d'avoir differens prix au dessus & au dessous du prix moyen, ou egalement ou inégalement, c'est à dire, ou qu'il y en ait autant d'un côté que d'autre, ou davantage au dessous du prix moyen, ou davantage au dessus.

Regle.

1°. METTEZ les differens prix des choses l'un sur l'autre, comme on fait en l'Addition. Et quoy qu'il soit indifferent de commencer par les plus grands prix, comme nous avons jugé à propos de le faire, ou par les moindres, neanmoins il faut mettre les valeurs de suite. 2°. Posez à côté gauche le prix moyen où l'on veut les choses, soit que ce prix moyen ait esté donné, ou soit qu'il l'ait fallu chercher. 3°. Mettez à droite les differences du prix moyen aux plus grands prix vis-à-vis des moindres prix, & la difference des moindres prix au prix moyen, vis-à-vis des plus grands prix. S'il n'y a que deux prix differens, vous mettrez la difference du prix moyen au plus grand prix vis-à-vis du moindre prix, & la difference du moindre prix au prix moyen vis-à-vis du plus grand prix, comme en l'Ex. I. qui suit. S'il y a trois prix differens, & qu'il y en ait deux plus grands que le prix moyen, vous mettrez vis-à-vis du moindre prix les deux differences du prix moyen aux deux plus grands prix, & vis-à-vis de chacun des deux plus grands prix, vous mettrez la difference du moindre prix au prix moyen, qui sera ainsi mise deux fois, comme en l'Ex. II. Et au contraire s'il n'y a qu'un prix qui soit plus grand que le prix moyen, vous luy donnerez les deux differences des moindres prix au prix moyen, & à ces deux moindres prix vous leur donnerez chacun la difference du plus grand prix au prix moyen, comme en l'Ex. III. S'il y en a quatre, & qu'il n'y ait qu'un prix moindre ou plus grand que le prix moyen, vous donnerez à ce seul les differences des trois autres au prix moyen, & à ces trois autres à chacun la difference au prix moyen de celuy qui sera seul, ou moindre ou plus grand que le prix moyen, comme en l'Ex. IV. Et si ces differens prix sont également partagez, c'est à dire qu'il y en ait deux plus grands & deux moindres que le prix moyen, on mettra la difference du prix moyen au plus grand prix vis-à-vis du plus grand des moindres prix, c'est à dire à celuy qui suit en valeur le prix moyen; & la difference du prix moyen au moindre des plus grands prix, vis-à-vis du moindre prix: Et la difference du plus petit prix au prix moyen, on la donnera au moindre des plus grands prix; & la difference du plus grand des moindres prix au prix moyen, on la donnera au plus grand prix. Comme en l'Ex. V. S'il y en avoit cinq, & qu'il

y en eut trois ou moindres ou plus grands que le prix moyen, on donnera la difference du prix moyen au plus grand prix, à celuy qui suit immediatement le prix moyen en descendant; puis à celuy qui le suit, on luy donnera la difference du prix moyen au second plus grand prix, & s'il y en a trois plus grands, on donnera encore à ce dernier la difference du prix moyen, au moindre des plus grands prix. Puis on donnera au plus grand prix la difference du prix moyen au prix qui le suit en descendant, & aux deux autres à chacun la difference du plus bas prix au prix moyen, comme en l'Ex. VI. 4°. Vous assemblerez toutes les differences en une somme. 5°. Vous ferez la Regle de Trois autant de fois qu'il y aura de prix differens, en mettant à chaque operation pour le premier terme la somme des differences; pour le second une des differences, & pour le troisiéme la quantité déterminée des choses qui doivent composer le mélange. Et le quatriéme de chaque operation, vous montrera combien il faudra prendre de parties des differens prix pour faire la somme ou masse demandée.

Exemple I.

Il y a du froment à 30 sols le boisseau, & du segle à 22 sols, combien en faut-il prendre d'un chacun pour faire 20 boisseaux à 24 sols chacun, qui vaudront ainsi 24 livres?

Mettez les deux prix differens 30 & 22 l'un sur l'autre: posez à gauche le prix moyen 24: mettez à droite vis-à-vis de 22 la difference de 24 à 30, qui est 6, & vis-à-vis de 30, la difference de 22 à 24 qui est 2: Assemblez en une somme les deux differences 6 & 2, qui font 8. Puis faites deux fois la Regle de Trois en mettant pour premier terme 8, la somme des differences: pour second terme une des differences, ou 2, ou 6: pour troisiéme terme 20 qui est la quantité demandée: & le quatriéme terme viendra par la premiere Regle de Trois, 5, qui montrera qu'il faudra prendre 5 boisseaux de froment à 30 sols, qui vaudront 7 livres 10 sols; & par la seconde Regle de Trois, il viendra 15, c'est à dire qu'il faudra prendre 15 boisseaux de segle à 22 sols, qui vaudront 16 livres 10 sols, & qui feront 24 livres, avec les 7 livres 10 sols de froment.

Operation.

differens prix.

prix moyen 24 $\begin{cases} 30 \\ 22 \end{cases}$ differences $\begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}$ quantité demandée. 20, valeur 24 livres.

Somme des differences 8

Premiere Regle de Trois, 8, 2, 20? 5, qui valent à 30 f. 7 l. 10 f.
Seconde Regle de Trois, 8, 6, 20? 15, qui valent à 22 f. 16 l. 10 f.

Somme 20 Somme 24 livres.

Exemple II.

On demande 100 boisseaux à 22 sols le boisseau, pris du mélange de trois sortes de grains, sçavoir de froment à 30 sols, de seigle à 24, & d'orge à 20, combien en faut-il prendre d'un chacun pour avoir 100 boisseaux à 22 sols le boisseau, qui vaudront 110 livres?

Operation.

	prix differens.				
prix moyen 22	30		2	quantité demandée	100. valeur 110. liv.
	24	differences	2		
	20		8, 2, ou 10.		

Somme des differences. 14.

Premiere Regle de Trois.	14, 2, 100?	$14\frac{2}{7}$	qui valēt à 30 f.	21 l. 8 f. 6 d. $\frac{6}{7}$ d.
Seconde.	14, 2, 100?	$14\frac{2}{7}$	qui valēt à 24 f.	17 l. 2 f. 10 d. $\frac{2}{7}$ d.
Troisiéme.	14, 10, 100?	$71\frac{3}{7}$	qui valēt à 20 f.	71 l. 8 f. 6 d. $\frac{6}{7}$ d.
	Somme	100.	Somme	110 liv.

Exemple III.

On demande 100 boisseaux à 24 sols le boisseau pris du mélange de trois sortes de grains; sçavoir de froment à 28 sols, de seigle à 22, & d'orge à 20, combien en faut-il prendre d'un chacun pour avoir 100 boisseaux à 24 sols le boisseau, qui vaudront 120 livres?

Operation.

24	28.	4, 2, ou 6.	
	22.	4	100. valeur 120 liv.
	20.	4	
		14	

14, 6, 100?	$42\frac{6}{7}$	qui valent à 28 f.	60 liv.
14, 4, 100?	$28\frac{4}{7}$	qui valent à 22 f.	31 l. 8 f. $\frac{4}{7}$
14, 4, 100?	$28\frac{4}{7}$	qui valent à 20 f.	28 l. 11 f. $\frac{5}{7}$
		Somme	120 liv.

Exemple IV.

Un Fondeur entreprend de faire une cloche du poids de 3500 livres, pour le prix de 500 livres d'argent. Il a quatre sortes de metaux de divers prix, dont il doit composer sa cloche; le cent du premier métal vaut 12 livres; le cent du second, 15; celuy du troisiéme, 17; & celuy du quatriéme, 20: combien en doit-il prendre d'un chacun pour faire sa cloche, en sorte

que pesant 3500 livres, le mélange vale 500 livres d'argent. Il faut premierement trouver le prix moyen par la Regle de Trois, en mettant pour le premier terme le poids demandé 3500; pour le second, le prix ou valeur demandée 500 livres d'argent; & pour le troisiéme, le 100 de métal. Ainsi 3500, 500, 100? $14\frac{2}{7}$ qui sera le prix moyen. Puis vous disposerez ainsi le prix moyen, les prix differens, leurs sommes, le poids ou quantité demandée, & le prix ou valeur de la quantité demandée.

	prix.	differences.	
$14\frac{2}{7}$	20	$2\frac{2}{7}$	
	17	$2\frac{2}{7}$	3500, valeur 500 livres.
	15	$2\frac{2}{7}$	
	12	$5\frac{5}{7}$, $2\frac{5}{7}$, $\frac{5}{7}$, ou $9\frac{1}{7}$	

Somme des differences 16.

Puis vous ferez quatre fois la Regle de Trois, mettant toûjours pour premier terme la somme des differences 16; pour second une des differences l'une apres l'autre; aux trois premieres $2\frac{2}{7}$; & à la quatriéme $9\frac{1}{7}$; pour troisiéme terme toûjours 3500; & pour quatriéme toûjours 500. Et vous aurez la preuve par la somme des poids, & par l'évaluation des prix.

16, $2\frac{2}{7}$, 3500? 500, qui valent à 20 liv. le cent, 100 livres d'argent.
16, $2\frac{2}{7}$, 3500? 500, à 17 livres le cent, 85 livres d'argent.
16, $2\frac{2}{7}$, 3500? 500, à 15 livres le cent, 75 livres d'argent.
16, $9\frac{1}{7}$, 3500? 2000, à 12 livres le cent, 240 livres d'argent.

Sommes des poids 3500. Somme d'argent 500 livres.



Exemple V.

Un Orfévre veut faire un ouvrage pesant 35 marcs d'argent au prix de 25 livres le marc : & parce qu'il n'a point d'argent à ce titre justement, mais qu'il en a de quatre differens titres ; le premier à 21 livres, le second à 23, le troisiéme à 29, & le quatriéme à 30 livres ; combien en doit-il prendre d'un chacun pour faire les 35 marcs proposez à 25 livres le marc, qui vaudront en argent 875 livres.

25	30	2	35. valeur 875 livres en argent.
	29	4	
	23	5	
	21	4	
		15	

15, 2, 35 ? 4 m. $\frac{2}{3}$ qui valent à 30 liv. 140 livres.
15, 4, 35 ? 9 m. $\frac{1}{3}$ qui valent à 29 liv. 270 liv. 13 s. 4 d.
15, 5, 35 ? 11 m. $\frac{2}{3}$ qui valent à 23 liv. 268 liv. 6 s. 8 d.
15, 4, 35 ? 9 m. $\frac{1}{3}$ qui valent à 21 liv. 196 liv.

35 marcs valent à 25 l. 875 liv. o s. o d.

Exemple VI.

Un homme faisant un festin, veut 30 bouteilles de vin à 10 sols la bouteille, prises du mélange de cinq sortes de vin, dont le premier vaut 20 sols la bouteille, le second 16, le troisiéme 12, le quatriéme 10, & le cinquiéme 6 ; combien en faut-il prendre d'un chacun pour faire les 30 bouteilles à 10 sols la piece ?

Operation.

10	20	2	30. valeur 15 livres.
	16	4	
	12	4	
	8	10	
	6	6, 2 ou 8	
	Somme	28	

28, 2, 30 ? $2\frac{1}{7}$ valent 2 liv. $\frac{1}{7}$ de 20.
28 4 30 $4\frac{2}{7}$ 3 liv. 4 $\frac{2}{7}$ de 16.
28 4 30 ? $4\frac{2}{7}$ 2 liv. 8 s. $\frac{2}{7}$ de 12.
28 10 30 ? $10\frac{5}{7}$ 4 liv. $\frac{5}{7}$ de 8.
28 8 30 ? $8\frac{4}{7}$ 2 liv. $\frac{2}{7}$ de 6.

30.

VOyla la maniere commune de traiter la Regle d'Alliage que nous n'approuvons nullement, pour estre embarassée par les fractions irregulieres où elle conduit. Ce qui nous a obligé d'en chercher une autre que nous pouvons appeller nouvelle, puisque nous ne sçavons point qu'elle ait esté enseignée par aucun Arithmeticien que nous ayons veu. Et l'avantage de cette methode est qu'elle fournit toutes les manieres possibles en nombres entiers d'allier les grandeurs proposées. Or il est fort necessaire que cette Regle ne se pratique qu'en nombres entiers, parce que souvent on n'a qu'une certaine mesure pour faire ses partages; par exemple un boisseau duquel il seroit impossible de prendre precisément les $\frac{2}{7}$ & $\frac{3}{7}$ parties, comme il s'est rencontré dans les operations cy-dessus.

Nous n'appellerons neanmoins cette nouvelle Methode qu'un Essay, afin de laisser l'honneur de l'invention à ceux qui voudront étendre cette Regle, & en tirer les consequences qui s'en peuvent tirer pour l'Arithmetique, & mesme pour la police où il est important de sçavoir en combien de manieres on peut allier des choses de differens prix & qualité.

CHAPITRE XXVI.

Essay d'une nouvelle Methode pour trouver en nombres entiers tous les Alliages possibles de la seconde espece.

AFin de faire mieux concevoir la voye que j'ay prise pour parvenir à cet Essay, je vas mettre tous les exemples precedens, où il y a plus de deux prix differens à allier, & qui doivent dans une quantité demandée faire une certaine valeur. Car en deux prix il ne se trouve qu'une maniere d'alliage.

Il y a icy deux operations à faire, la premiere pour trouver le premier & plus petit mélange; la seconde pour en continuer la progression en nombres entiers tant qu'elle est possible; c'est à dire que comme il y a des prix qui vont les uns en augmentant & les autres en diminuant, il faut determiner les degrez par lesquels les uns montent & les autres descendent: & la borne de la progression sera lorsque celuy ou ceux qui descendent par certains degrez, viennent enfin si pres de l'unité, qu'ils ne peuvent plus descendre.

PREMIERE OPERATION.

Pour trouver le premier ou plus petit Mélange.

D'Abord il faut mettre les differences de tous les prix au prix moyen, & puis les assembler en une somme, poser aussi la quantité demandée

avec sa valeur à côté, comme il a esté fait cy-dessus & que nous l'allons faire cy-apres.

Et d'autant que parmy ces differences il y en a qui doivent demeurer telles qu'elles sont, & d'autres qui doivent changer par augmentation, pour faire un mélange qui donne la quantité demandée & sa valeur : voicy la voye pour sçavoir quelles sont les differences qui ne doivent point changer, & celles qui doivent recevoir de l'augmentation expliquée par des Exemples, sur lesquels il faut avoir toûjours les yeux, afin de la mieux entendre.

Ex. I.

	30,	2	100. v. 110 l.
22	24,	2	
	20,	8, 2, ou 10.	
		14	

Ex. II.

	28,	4, 2, ou 6.	
24	22,	4	100. v. 120 l.
	20,	4	
		14	

Ex. III.

	30	2	35. v. 38 l. 10 s.
22	25	2	
	20,	8, 3 ou 11.	
		15	

Ex. IV.

	20	3	636. v. 95 l. 8 s.
	28	3	
51	16	3	
	12,	5, 3, 1, ou 9.	
		18	

Ex. V.

	30,	2	
25	29,	4	35. v. 875 l.
	23,	5	
	21,	4	
		15	

Ex. VI.

	20	2	
	16	4	
10	12	4	30. v. 15. l.
	8	10	
	6,	6, 2, ou 8.	
		28.	

Remarquez qu'en trois, quatre ou cinq prix, il y doit avoir deux differences sujettes au changement, l'une au dessus du prix moyen, l'autre au dessous. Et generalement parlant on doit prendre les deux differences qui se trouveront vis-à-vis des prix qui sont egalement distans du prix moyen, soit que ces prix soient immediatement au dessus & au dessous de luy, soit qu'il y en ait d'autres entre-deux : soit aussi que ces differences soient seules, ou soit qu'elles soient accompagnées d'autres differences plus grandes ou moindres. Ainsi dans le I. Ex. ce sera 2, qui est vis-à-vis de 24, & 2 qui est vis-à-vis de 20, aupres de 8; parce que ces differences sont vis-à-vis de 20 & de 24, qui sont egalement distans de 22, le prix moyen. Ainsi dans le II. Ex. ce sera 4 qui est vis-à-vis de 28, & 4 qui est vis-à-vis de 20; parce que 28 & 20, sont egalement distans de 24 prix moyen. Ainsi dans le IV. Ex. ce sera 3 qui est vis-à-vis de 18, & 3 qui est vis-à-vis de 12, accompagné de 5 & d'1, parce que 18 & 12 sont egalement distans de 15. Or où il y a plusieurs differences ensemble vis-à-vis d'un prix, comme dans ce IV. Ex.

& dans le premier, on prend celle qui est la difference de l'autre prix au prix moyen, dont la difference qui est vis-à-vis doit recevoir changement aussi bien que la sienne, comme dans le I. Ex. c'est 2 qui est vis-à-vis de 20 & non pas 8, parce que 2 est la difference qui luy a esté donnée de 24 au prix moyen, & que c'est la difference qui est vis-à-vis de 24 qui doit aussi estre changée. De mesme dans le IV. Ex. il faudra prendre 3 qui est vis-à-vis de 12, & non pas 5 ny 1 pour la mesme raison. Et dans le V. Ex. ce sera 4, qui est vis-à-vis de 29, & 4 qui est vis-à-vis de 21, parce que 29 & 21 sont egalement distans de 25 prix moyen. De mesme dans le VI. Ex. ce sera 4 qui est vis-à-vis de 12, & 10 qui est vis-à-vis de 8, parce que 12 & 8 sont egalement distans de 10, prix moyen. Et lorsqu'il n'y aura pas de prix qui soient egalement distans du prix moyen, on prendra les differences qui sont vis-à vis des deux prix plus proches du prix moyen au dessus & au dessous, comme dans le III. Ex. on prendra 2 qui est vis-à-vis de 25, & 3 qui est vis-à-vis de 20 en compagnie de 8, parce que 25 & 20 sont les prix plus proches de 22, prix moyen. Toutes les autres differences demeureront sans changement pour le premier mélange.

Le choix estant fait des differences qui doivent recevoir augmentation; voicy la Regle pour la faire.

1°. Otez de la quantité demandée la somme de toutes les differences. 2°. Mettez en une somme les differences qui doivent recevoir augmentation; avec cette somme divisez le reste de la quantité demandée. 3°. Multipliez le quotient de cette division par chacune des simples differences, dont la somme avoit divisé le reste de la quantité demandée. 4°. Adjoûtez le produit de chaque multiplication à chaque difference qui l'a produit, & si elle est accompagnée de quelque autre difference, joignez-là aussi à ce produit; & par ce moyen on aura le premier mélange qui est composé tant des differences qui n'ont point changé que de celles qui ont receu augmentation. Et la preuve de l'operation est en ce que les differences avec leurs changemens, composent non seulement la quantité demandée, mais encore sa valeur & son prix, comme vous l'allez voir dans les operations particulieres de chaque Exemple.

Exemples du premier & plus petit mélange.

	I.				Premier mélange.	
	30	2	100			valeur.
	24	2	14		2	3 l.
22	20, 8,	2, ou 10.	86 2	(21 $\frac{1}{2}$	45	54 l.
					53	53 l.
		14	44	2	100	110 l.
				43		

II. Premier mélange.

24	28, 4, 2, ou 6.	100	49 v.	68 l. 12 s.
	22, 4	14	4	4 l. 8 s.
	20, 4	86 (10 $\frac{3}{4}$	47	47 l.
	14	8 4		
		43		
		160.	120 l.	

III. Premier mélange.

22	30 2	35		2	v. 3 l.
	25 2	15		10	v. 12 l. 10 s.
	20 8, 3, ou 11.	20 (4	4	23	23 l.
	15	5 2	3		
		8	12	35	38 l. 10 s.

IV. Premier mélange.

15	20 3	636	3	v. 12 s.
	18 3	18	312	56 l.
	16 3	618 (103	3	9 s.
	12, 5, 3, 1. ou 9	6 3	318	38 l.
	18	309	636	95

V. Premier mélange.

25	30 2	35	2	v. 60 l.
	29 4	15	14	406 l.
	23 5	20 (2 $\frac{1}{2}$	5	115 l.
	21 4	8 4	14	294 l.
	15	10	35	875 l.

VI. Premier mélange.

10	20 2	30	2	v. 2 l.
	16 4	28	4	3 l. 4 s.
	12 14	20 (1	5	3 l.
	8 10	14	1	4 l. 8 s.
	6 6, 2 ou 8		8	2 l. 8 s.
	28		30	15 l.

Remarquez que quand les differences, qui doivent recevoir augmentation, sont égales, comme dans les Exemples I. II. IV. & V. on abregera l'operation en partageant par 2, le reste de la quantité demandée. Ainsi dans le premier Exemple partageant 86 par 2, il vient 43 qu'on donne à chacune des differences. Ainsi des autres qui ont leurs differences pareilles.

SECONDE OPERATION.

Pour trouver tous les mélanges poßibles ensuite du premier.

LA seconde operation donne la continuation de tous les mélanges possibles, par un artifice & suite de progressions, qui justifie ce que nous avons repeté beaucoup de fois, qu'il y a des richesses immenses dans les Nombres.

Les differences qui n'ont point receu de changement dans le premier mélange, augmenteront dans tous les autres mélanges suivans, en montant par une progression Arithmetique suivant leur dénomination. Si c'est 2, il la fera binaire; ainsi 2, 4, 6, 8, &c. Si c'est 3, il la fera ternaire; ainsi 3, 6, 9, 12, &c. Si c'est 4, il montera de 4 en 4; ainsi 4, 8, 12, 16, &c.

Les autres differences qui ont esté changées pour faire le premier mélange, feront leurs progressions Arithmetiques par rapport à la moitié de la quantité demandée, par exemple à 50, la moitie de 100 qui est la quantité demandée du premier & second Exemple. Celles qui seront au dessous de cette moitié descendront par degrez, composez d'autant d'unitez qu'elles sont éloignées de cette moitié. Par exemple, 45 estant éloigné de 5 unitez au dessous de 50, il descendra de 5 en 5 & fera cette progression Arithmetique, 45, 40, 35, 30, &c. Celles qui sont au dessus de cette moitié feront leur progression en montant par autant d'unitez qu'elles en seront éloignées; ainsi par exemple, 53 estant éloigné de trois unitez au dessus de 50, fera cette progression Arithmetique en montant, 53, 56, 59, 62, &c. Et celles qui par leur augmentation seront devenuës pareilles à la moitié de la quantité demandée, continueront toûjours sans changer leurs nombres. Ainsi dans le IV. Exemple, 318 estant égal à la moitié de la quantité demandée 636, continuera de mesme & aura toûjours 318 dans tous les mélanges suivans.

Cette Regle n'est que particuliere pour les differences egales. Voyez la Remarque ou Exception qui est apres le III. Exemple, où nous l'avons renvoyée pour ne rien confondre.

Toutes ces Progressions continueront comme elles ont commencé, & ne finiront, comme nous avons dit, que quand la plus petite de celles qui descendent approchera si pres de l'unité, qu'elle ne pourra plus continuer sa progression; & alors elles cesseront toutes, & l'on aura par-là tous les mélanges possibles en nombres entiers, ou s'il se rencontre quelque fraction,

elle sera rare & ne passera guere un demy, qui n'est pas une fraction irreguliere comme celles qui viennent par la methode commune.

Exemple I. Avec les progressions de tous ses mélanges.

UN Marchand de bled veut faire 100 boisseaux à 22 sols le boisseau, qui vaudront ainsi 110 livres, pris du mélange de froment à 30 sols le boisseau, de seigle à 24 sols, & d'orge à 20 sols, combien en doit-il prendre d'un chacun, & combien peut-il varier son mélange?

		Premier mélange.	2	3	4	5	6	7	8	9e. & dernier mélange.
100	30, 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
à 22	24, 2	45	40	35	30	25	20	15	10	5
110 l.	20, 8, 2	53	56	59	62	65	68	71	74	77
	14	100	100	100	100	100	100	100	100	100

valeurs	3 l.	6 l.	9 l.	&c.	en augmentant toûjours de 3. l.
	54 l.	48 l.	42 l.	&c.	en diminuant toûjours de 6 l.
	53 l.	56 l.	59 l.	&c.	en augmentant toûjours de 3 l.
	110 l.	110 l.	110 l.	&c.	ce sera toûjours la mesme somme de 110 l.

Exemple II.

Il en a à d'autres prix, & voicy les mélanges qu'il en a pû faire, dont il fait porter la montre au marché & le numero des boisseaux de chaque espece & prix, qu'il fait entrer dans les 100 boisseaux de mélange.

100	28, 4, 2	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34
à 24	22, 4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
120 l.	20, 4	47	44	41	38	35	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2
	14	100	100	&c.													

valeurs	65 l. 12 s.	7 l. 4 s.	65 l. 16 s.	&c. en diminuant toûjours de 28 s.
	4 l. 8 s.	8 l. 16 s.	13 l. 4 s.	&c. en ajoûtant toûjours 4 l. 8 s.
	47 l.	44 l.	41 l.	&c. en diminuant toûjours de 3 l.
	120 l.	120 l.	120 l.	&c. il y aura toûjours 120 l.



Exemple III.

Il retourne au marché avec d'autre bled mêlé ſeulement en trois manieres.

35	30	2	2	4	6	les 2 à 30 ſ. font 3 l.	les 4, 6 l.	les 6, 9 l.
à 22	25	2	10	6	2	les 10 à 25 ſ. fōt 12 l. 10 ſ.	les 6, 7 l. 10 ſ.	les 2, 2 l. 10 ſ.
38 l. 10 ſ.	20	8, 3,	23	25	27	les 23 à 20 ſ. font 23 l.	les 25, 25 l.	les 27, 27 l.
		15	35	35	35	35 38 l. 10 ſ.	35 38 l. 10 ſ.	38 l. 10 ſ.

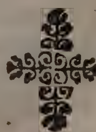
Remarque.

LA Regle donnée cy-deſſus pour la continuation des progreſſions par rapport à la moitié de la quantité demandée à l'égard des differences qui ont receu du changement, n'eſt pas juſte icy n'eſtant que particuliere pour les differences égales.

Ce qui nous donne lieu de faire une Remarque qui rendra la Regle plus generale, en rendant raiſon à meſme temps des progreſſions de la Regle precedente. Ces progreſſions ſe faiſoient en ſorte qu'apres le premier mélange, les differences qui avoient receu du changement montoient ou deſcendoient par autant de degrez que les autres differences en recevoient en montant, afin de conſerver toûjours la meſme proportion dans tous les mélanges, comme on le peut voir en repaſſant ſur les Exemples precedens. Ainſi nous pouvons établir cette maxime, les differences qui n'ont point receu de changement dans le premier mélange, monteront par les degrez de leur dénomination, le 2 par 2, le 3 par 3, le 4 par 4, &c. les autres qui doivent monter ou deſcendre partageront les degrez de ces premiers. Si par exemple en trois prix il y en a deux qui doivent monter comme dans le premier Exemple, il y en a un qui monte par 2 degrez, & l'autre par 3, qui font 5, celle qui deſcend diminuera auſſi ſes progreſſions de 5 degrez. S'il y en a deux qui deſcendent comme dans le ſecond Exemple, où il y en a un qui monte de 4 degrez, les deux autres rempliront ces 4 degrez en deſcendant. Ainſi 49 deſcendra d'une unité, & 47 de trois, qui rempliront les 4 de celle qui monte. En ce III. Exemple, les démarches pour monter & pour deſcendre ſont ainſi déterminées : la premiere difference ou le premier prix du premier mélange qui eſt 2, doit monter par ſa dénomination : la ſeconde, ou le ſecond prix du premier mélange, qui eſt 10, doit deſcendre par 4, à 6 : & le troiſiéme prix du premier mélange qui eſt 23, doit monter par 2 à 25 ; (nous allons donner la regle pour trouver ces deux démarches) & ainſi la deſcente par 4 que fait le ſecond prix du premier mélange, qui eſt 10, eſt recompenſée par les deux autres qui montent chacun de deux.

Regle plus generale pour la continuation du premier mélange.

DOublez les differences, & retirez leur ſomme de la quantité demandée: diviſez le reſte par la ſomme des premieres differences qui ont ſervy à trouver le premier mélange, & multipliez le quotient par chacune de ces differences, & en ajoûtez le produit aux differences doublées, & s'il y en a quelqu'une qui les accompagne, il l'a faut auſſi doubler & l'ajoûter, laiſſant aux differences qui n'ont point receu de changement dans le premier mélange, à faire leurs démarches ou progreſſions ſuivant leur dénomination; & vous aurez le ſecond mélange, & par celuy là tous les ſuivans, en les augmentant ou diminuant des meſmes degrez que le ſecond a au deſſus ou au deſſous du premier mélange. Ainſi pour le faire voir par les Exemples precedens, en doublant les differences du premier Exemple, on aura 4, 4, 4 & 16, au lieu de 2, 2, 2 & 8, dont la ſomme eſt 28, qu'il faut retirer de 100, & il reſte 72. diviſez par 4 qui eſt la ſomme des premieres differences égales 2, 2; puis multipliez le quotient 18 par 2 & par 2, vous aurez 36, qui eſtant ajoûté d'un côté à 4, fait 40 pour un des prix du ſecond mélange, & de l'autre à 20 qui eſt le double des deux differences qui ſont enſemble 2 & 8 qui font 10, vous aurez 56 qui eſt un des prix du ſecond mélange; & ces deux prix avec celuy qui n'avoit point receu de changement, & qui a fait icy ſa progreſſion ſuivant ſa dénomination 2, 4; feront la quantité demandée, ainſi des autres. Et pour le III. Exemple, ayant doublé les differences 2, 2, 8 & 3 qui font 30, lequel ôté de la quantité demandée 35, reſte 5, qui eſtant diviſé par 5, la ſomme de 2 & de 3 laiſſe 1, qui eſtant multiplié par 2 & par 3, donne 2 & 3, leſquels eſtant adjoûtez ſeparément à leurs differences doublées 4 & 22, font du côté de 4, 6, & du côté de 22, font 25. La progreſſion continuera pour tous les mélanges ſuivans par les meſmes nombres de cette ſeconde à l'égard du premier mélange, ſoit en augmentant ſoit en diminuant; ainſi le premier prix fait cette progreſſion 2, 4, 6, par 2; le ſecond prix fait celle-cy, 10, 6, 2, par 4; le troiſiéme prix celle-cy, 23, 25, 27, par 2, en montant.



Exemple IV.

Un Fondeur a du métal à 20 livres le cent, à 18, à 16 & à 12 : il en veut faire une cloche à 15 livres le cent, qui peze 636 livres, & qui par conſequent vaudra en argent 95 livres 8 ſols, combien en doit-il prendre d'un chacun pour faire ſon alliage ?

Premiere Operation pour trouver le premier mélange.

	20 l.	3	3	636. valeur 95 l. 8 ſ.
	18 l.	3	312	18
15 l.	16 l.	3	3	
	12 l.	5, 3, 1 ou 9	318	618
		18	636	2 (309.

Seconde Operation pour la progreſſion des mélanges.

Premier mélange.	2 mél.						
3	6	9	12	15	18	21 &c.	il y aura
312	306	300	294	288	282	276 &c.	52 mélanges.
3	6	9	12	15	18	21 &c.	
318	318	318	318	318	318	318 &c.	
Somme 636	636	636	636	636	636	636.	

valeurs.

12 ſ. car à 20 l. le cent, c'eſt 4 ſ. la livre ; & 3 livres valent 12 ſ.

56 l. 3 ſ. 2 d. à 18 l. le cent, c'eſt 3 ſ. 7 d. la livre, & il reſte 20 d. 312 l. valent 56 l. 3 ſ. 2. d.

9 ſ. 8 d. à 16 l. le cent, 3 ſ. 2 d. reſte 40 d. 3 livres valent 9 ſ. 8 d.

38 l. 3 ſ. 2 d. à 12 l. le cent, c'eſt 2 ſ. 4 d. la livre, reſte 80 d. 318 livres valent 38 l. 3 ſ. 2 d.

Sõme 95 l. 8 ſ.

Exemple V.

Un Orfévre a de l'argent à 30 livres le marc, à 29, à 23, & à 21, il en veut faire 35 mars à 25 livres le marc, combien doit il prendre d'un chacun pour faire l'alliage ?

Premiere Operation pour le premier mélange.

	30	2	2 val.	60 l.	35 marcs à 25 l. le marc, valent 875 l. d'argent.
	29	4	14 v.	406 l.	
25	23	5	5	115 l.	35 — 35
	21	4	14	294 l.	15 — 2 (17 $\frac{1}{2}$
Sõme		15	35 m.	875 l.	20 — 2 (10

Seconde Operation pour la progreſsion du mélange.

	2	4	6	9
	14	10 $\frac{1}{2}$	7	3 $\frac{1}{2}$
	5	10	15	20
	14	10 $\frac{1}{2}$	7	3 $\frac{1}{2}$
Sõme	35	35	35	35

fin.

valeurs.		
60 l.	120 l.	180 l.
406 l.	304 $\frac{1}{2}$	203
115 l.	230	345
294 l.	220 $\frac{1}{2}$	147
Sõme 875 l.	875	875

preuve.
à 30 l. le marc, 2 marcs valent 60 l.
à 29 l. le marc, 14 marcs valent 406 l.
à 23 l. le marc, 5 marcs valent 115 l.
à 21 l. le marc, 14 marcs valent 294 l.
Sommes 35 marcs valent 875 l.

Exemple V.

Un Cabarettier veut méler cinq ſortes de vin, à 20 ſ. la pinte, à 16, à 12, à 8, & à 6: pour en faire trente pintes à 10 ſ. la pinte, qui vaudront ainſi 15 livres; combien doit-il prendre d'un chacun, & en combien de façons les peut-il méler?

Premiere Operation pour le premier mélange.

	20	2	2 valent	2 l.	30. valent 15 l.
	16	4	4	3 l. 4. ſ.	28
10	12	4	5	3 l.	
	8	10	11	4 l. 8. ſ.	2 (1
	6	6, 2, ou 8.	8	2 l. 8 ſ.	2
Somme 28		Sõme 30.		val. 15 l.	

$\frac{30}{15}$

Il n'y a point de ſeconde Operation ny d'autre mélange, parce que ceux qui devroient diminuer ne le peuvent par autant de degrez qu'ils ſont éloignez de 15, qui eſt la moitié de la quantité demandée.

CHAPITRE XXVII.

Regle de Fauſſe-Poſition ſimple.

QUand on cherche un nombre qui avec une de ſes parties en compoſe un autre, par exemple, ſi on demande quel eſt le nombre qui avec ſa moitié faſſe 18, on en prend un au hazard, & qui n'eſt pas celuy qu'on cherche,

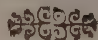
cherche, à qui l'on donne le nom de Faux, & apres luy avoir ajoûté la partie requise, par exemple sa moitié, on en fait un second nombre qui n'est point celuy qui devroit venir : Alors pour avoir le vray nombre qu'on cherche, en operant par la Regle de Trois, on multiplie par le nombre Faux, le nombre donné, & puis on divise le produit par celuy á qui on avoit ajoûté la partie demandée, & il vient au quotient le vray nombre. Par exemple, supposé que pour trouver un nombre, qui avec sa moitié fit 18, on eût pris 6, qui avec sa moitié 3 ne fait que 9 : apres avoir multiplié 18 par 6, on divise le produit 108 par 9, & il vient 12 qui est le vray nombre qu'on cherche, car 12 avec sa moitié 6 fait 18.

Operation. 9, 6, 18? 12.

Avertissement.

POur faire commodément la Regle de Fausse-Position où il y a plusieurs parties demandées, il faut choisir pour le nombre Faux le moindre qu'on peut, qui ait les parties demandées sans fraction ; par exemple si on demandoit un nombre qui eût un sixiéme, un quart, un tiers, il faudroit prendre 12, qui a toutes ces portions sans fraction, sçavoir 2, 3, 4 : Si l'on demandoit un nombre qui eût un tiers & un cinquiéme, il faudroit prendre 15, qui est le moindre qui ait ces portions en entiers, car 3 fois 5 font 15; de mesme si on demandoit un nombre qui eut un tiers & un septiéme, il faudroit prendre 21, qui est le premier qui soit mesuré par 3 & par 7, &c. comme nous avons veu dans le Crible d'Eratosthene, Livre IV.

Ensuite pour operer par la Regle de Trois, on dispose les nombres en mettant le nombre Faux en la seconde place, les retranchemens ou additions faits au nombre Faux en la premiere, & le nombre énoncé à la troisiéme ; puis par la Regle de Trois, on multipliera le troisiéme par le second ; on divisera le produit par le premier, & le quotient sera le nombre cherché. Exemple. Une armée a esté entierement défaite, le tiers a esté tué, le quart s'en est fuy, & il en a esté pris prisonniers 8000. Pour avoir le nombre de l'armée, je prens pour nombre faux 12, parce qu'il a un tiers & un quart sans fraction, qui sont 4 & 3, d'où retranchant le tiers & le quart qui font 7, il reste 5, au lieu de 8000. Je place ainsi mes nombres, 5, 12, 8000, (on peut ôter les zero dans l'operation) & j'opere par la Regle de Trois, multipliant 8000 par 12, & le produit 96000, estant divisé par 5, j'ay au quotient 19200, qui est justement le nombre vray dont l'armée estoit composée. Car si de 19200 j'ôte le tiers qui est 6400, & le quart qui est 4800, qui font ensemble 11200, il restera 8000.



CHAPITRE XXVIII.

Regle d'Algebre.

C'Est de cette Regle de Fausse-Position qu'est née la Regle d'Algebre. Car au lieu du Faux nombre qu'on met icy, on met dans la Regle d'Algebre une racine ainsi marquée 1. j. sur laquelle on opere de mesme qu'on fait icy sur le faux nombre, c'est à dire qu'on en fait les retranchemens, additions, soutractions, multiplications & divisions, apres avoir fait la reduction des fractions à une mesme dénomination. Et pour le faire comprendre nous allons operer sur le mesme Exemple par la Regle de Faux & par la Regle d'Algebre, qui produiront toutes deux le mesme effet.

Question.

Quel est le nombre d'où ayant retranché le tiers & le quart, il reste dix ?

Resolution par la Regle de Faux.

JE suppose que c'est 12, & je voy bien que ce n'est pas 12, parce qu'en ayant retranché le tiers qui est 4, & le quart qui est 3, & qui font 7, il ne reste que 5, au lieu de 10. Je ne laisseray pas de trouver par 12 le veritable nombre, en disposant ainsi le reste du retranchement, le faux, & le nombre énoncé ou donné, 5, 12, 10; multipliant 10 par 12, il vient 120, qui estant divisé par 5 donne 24 au quotient qui est le nombre cherché. Car ôtant de 24, 8 qui en est le tiers, & 6 qui en est le quart, & qui font ensemble 14, il reste 10, comme on avoit demandé.

Resolution par la Regle d'Algebre.

JE pose 1. j. que je suppose estre égale au nombre cherché. Je mets à part un tiers & un quart en fractions, ainsi $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$; je les reduits à mesme dénomination, ainsi $\frac{4\ 3}{12}$; je les ajoûte ensemble & j'ay $\frac{7}{12}$; j'en fais la soutraction comme demande la question, & il reste $\frac{5}{12}$; & parce que j'ay trouvé que $\frac{5}{12}$ sont égales à 10, apres avoir reduit en fraction $\frac{5}{12}$ & $\frac{10}{1}$, je les multiplie en croix pour les reduire à mesme dénomination, & il vient $\frac{5\ 120}{12}$; enfin je divise les deux Numerateurs l'un par l'autre, 120 par 5, & il vient au quotient 24 qui est le nombre cherché, dont ôtant le tiers & le quart il reste 10, comme on avoit demandé.

CHAPITRE XXIX.

Regle de Fauſſe poſition double.

QUoy qu'on ne ſe ſerve de cette Regle de Fauſſe poſition double que lorſque la ſimple ne peut reſoudre la queſtion, neanmoins pour plus de facilité nous allons prendre un ſimple nombre ſur lequel nous ferons les deux Regles ou Cas de cette Regle de poſition double.

Pour reſoudre une queſtion on prend deux nombres differens, qui ne ſont ny l'un ny l'autre celuy qu'on cherche. On écrit ſeparément les deux nombres l'un au deſſus de l'autre, & vis-à-vis de chacun la diſtance au nombre donné. Comme ſi on avoit demandé quel eſt le nombre qui avec ſa moitie fait 9; & qu'on eut pris pour la premiere ſuppoſition le nombre 2, avec ſa moitié 1, il ne fait que 3, qui eſt diſtant de 9, de 6, ainſi l'on a pour cette premiere ſuppoſition 2 & 6. Et ſi pour la ſeconde ſuppoſition on avoit pris 4, avec ſa moitié il ne fait que 6 & non pas 9, il s'en faut 3 : Donc pour la ſeconde ſuppoſition on a 4 & 3. Or il faut remarquer que ces deux diſtances 6 & 3, du nombre 9, ſont toutes deux au deſſous de 9, à la difference de celles qui paſſent le nombre donné. Apres avoir écrit les nombres pris, & leurs diſtances vis-à-vis de chacun, ainſi $\frac{2}{4}, \frac{6}{3}$ on les multiplie en croix & il vient 6 & 24. Cela fait on regarde ſi les diſtances ſont pareilles, c'eſt à dire ſi elles ſont toutes deux ou moindres que le nombre donné, comme en cet Exemple, ou toutes deux plus grandes que le nombre donné : Ou ſi elles ſont diſſemblables, c'eſt à dire que l'une ſoit au deſſous du nombre donné & que l'autre le paſſe, alors on agit differemment. Au premier cas, où les diſtances ſont ſemblables, on ſoutrait les produits de la multiplication en croix l'un de l'autre, comme icy 6 de 24, & il reſte 18; puis on ſoutrait les diſtances l'une de l'autre comme icy 3 de 6, & il reſte 3. Avec ce reſte 3, on diviſe l'autre reſte 18, & il vient au quotient 6, qui eſt le nombre cherché, qui avec ſa moitié 3 fait 9.

Au ſecond cas ou les diſtances ſont diſſemblables, c'eſt à dire où l'une eſt moindre que le nombre donné & l'autre le paſſe. Comme ſi dans la queſtion precedente, quel eſt le nombre qui avec ſa moitié fait 9, nous avions pris pour la premiere ſuppoſition 2, qui avec ſa moitié 1, ne fait que 3, dont la diſtance à 9 eſt 6 qui eſt au deſſous de 9. Et que pour la ſeconde ſuppoſition nous euſſions pris 8, qui avec ſa moitié 4 fait 12 qui eſt plus grand que 9 de 3. Apres avoir mis les deux nombres pris à plaiſir 2 & 8, & mis leurs diſtances 6 & 3 vis-à-vis de chacun, & les avoir multipliez en croix, ainſi $\frac{2}{8}\times\frac{6}{3}$ Alors au lieu que dans le premier cas, on ſoutrait les produits de

6 48

la multiplication, & les diſtances les unes des autres; icy au contraire, on les ajoûte les uns aux autres, puis on diviſe une des ſommes par l'autre, &

le quotient est le nombre cherché. Comme icy ayant ajoûté les deux produits de la multiplication en croix 6 & 48, qui font 54 ; & les deux distances 6 & 3, qui font 9, on divise 54 par 9, & il vient au quotient 6 qui est le nombre cherché, qui avec sa moitié fait 9 comme on avoit demandé.

CHAPITRE XXX.

MAXIME GENERALE

Pour trouver en tous les genres de Proportions données, les nombres inconnus par leur distance ou difference donnée ou trouvée, quoy qu'il n'y ait aucun nombre donné.

IL faut diviser la distance donnée ou trouvée par la distance des deux moindres termes de la proportion donnée, & multiplier le quotient par chacun des deux termes de la proportion, le moindre terme donnera le moindre nombre inconnu, & le plus grand terme donnera le plus grand nombre inconnu.

Exemples en tous les genres de Proportions.

En la proportion Surparticuliere.

QUels sont les deux nombres en la proportion sesquialtere qui sont distans l'un de l'autre de 12? Les deux premiers termes de cette proportion sont 2 & 3, qui ne sont distans que de l'unité, & divisant 12 par 1, il vient 12 au quotient, qui estant multiplié par 2 le moindre terme de la proportion donne 24 pour le moindre nombre inconnu, & multiplié par 3 le plus grand terme de la proportion, donne 36 pour le plus grand nombre inconnu, & 24 & 36 sont en proportion sesquialtere & éloignez l'un de l'autre de 12, ce qu'on avoit demandé.

En la proportion Surpartiente.

QUels sont les deux nombres distans de 6, en la proportion surbipartiente trois, dont les premiers termes sont 5 & 3? 5 & 3 estant éloignez l'un de l'autre de 2 ; & 2 divisant 6, il vient au quotient 3, qui estant multiplié par 3 & par 5, donne 9 & 15, qui sont en la proportion demandée & distans l'un de l'autre de 6.

En la proportion Multiple.

QUels sont les deux nombres distans de 15 en la proportion quadruple? les premiers termes sont 4 & 1, qui sont distans de 3, lequel divisant 15 donne au quotient 5, qui estant multiplié par 1, donne 5 pour le moindre nombre inconnu & multiplié par 4, donne 20 pour le plus grand nom-

bre inconnu, & 5 & 20 sont en proportion quadruple distans de 15.

En la proportion Multiple Surparticuliere.

QUels sont les deux nombres en la Triple surtierce distans l'un de l'autre de 35? les deux premiers termes de cette proportion sont 10 & 3 qui sont distans de 7, lequel divisant 35, donne au quotient 5, qui estant multiplié par 3 & par 10, donne 15 & 50, qui sont distans de 35, & en proportion triple surtierce, comme on avoit demandé.

En la proportion Multiple Surpartiente.

QUels sont les deux nombres distans de 28 en la proportion double surbipartiente cinq? les premiers termes 12 & 5 sont distans de 7, qui divisant 28, donne au quotient 4, qui estant multiplié par 5 & par 12 donne 20 & 48, en la proportion demandée & distans de 28.

Ainsi dans toutes les especes de chaque genre de proportion.

Application de cette Maxime.

C'Est par cette maxime qu'on resout une infinité de questions qu'on avoit creû ne se pouvoir resoudre que par l'Algebre. Tel est l'enigme du mulet & de l'anesse proposé par Euclide, dont on trouve la solution par la découverte de la distance dans la proportion qu'il dit estre double. L'enigme est tel, si je vous donne une de mes mesures, nous en aurons autant l'un que l'autre; & si vous m'en donnez une des vostres, j'en auray le double de vous. Combien en avoient-ils chacun? Il faut raisonner icy pour le découvrir. Premierement puisqu'à la fin l'un en auroit le double de l'autre: voyla la proportion donnée, qui est la double. Il ne faut que chercher la distance ou difference de leurs charges, & on la découvre ainsi. Quand celuy qui en a le plus en donne une à l'autre qui en a le moins, & qu'ils deviennent égaux, assurément celuy qui en avoit le plus en avoit deux plus que l'autre; puisqu'en donnant une & l'autre en recevant une, il deviennent égaux. Et quand celuy qui en a le plus en reçoit une de celuy qui en avoit deux moins, celuy qui en avoit deux de plus commence à en avoir quatre plus que l'autre, puisque l'un augmente d'une, & l'autre diminuë d'une. Donc 4 est leur distance ou difference en la proportion double. Divisez 4 par la difference de 2 à 1 qui sont les premiers termes de la proportion double, & cette difference n'estant que l'unité, le quotient sera 4, qui estant multiplié par 1 & par 2, on aura les deux nombres inconnus 4 & 8 qui sont doubles l'un de l'autre; & chacun reprenant ce qu'il avoit, c'est à dire 4 en reprenant 1 aura 5, & 8 en rendant 1 qu'on luy a donné en aura 7, qui estoient les deux nombres des mesures qu'ils avoient auparavant.

Car si celuy qui en a 7 en donne 1 à celuy qui en a 5, ils en auront tous deux 6, & si celuy qui en a 5 en donne 1 à celuy qui en a 7, celuy qui en avoit 5 n'en aura plus que 4, & celuy qui en avoit 7 en aura 8. Le discours est icy plus long que l'operation, & nous l'avons étendu pour montrer

comment-il faut raiſonner dans les autres Exemples, où la proportion eſt donnée & où il faut chercher la diſtance quand elle n'eſt pas clairement exprimée.

II. Exemple. Deux armées eſtoient auſſi nombreuſes l'une que l'autre au commencement de la Campagne. La premiere a entrepris quatre fieges où elle n'a perdu que deux milles hommes & a reüſſi; l'autre n'a fait qu'un fiege qu'elle a levé apres y avoir perdu 12000, & 6000 deſerteurs; en ſorte que la premiere armée s'eſt trouvée à la fin de la campagne, eſtre plus nombreuſe deux fois que l'autre. Combien y avoit-il de ſoldats en l'une & l'autre au commencement de la campagne, & combien à la fin? La difference eſt 16000 en proportion double. Réponſe. Il y avoit en l'une & l'autre armée 34000 hommes au commencement de la campagne; & il en eſt reſté 32000 en la premiere, & 16000 en l'autre.

Que ſi on avoit ſuppoſé que les armées euſſent eſté de 40000 chacune, & qu'elles n'euſſent fait chacune que la meſme perte, alors la proportion auroit changé, & ainſi l'on auroit par ſon moyen trouvé le reſte de meſme.

CHAPITRE XXXI.

MAXIMES

Pour changer les Proportions données en d'autres proportions demandées.

SI à deux nombres en proportion double, ſoit qu'ils ſoient tous deux pairs, ſoit qu'il y en ait un impair, on ajoûte une fois le moindre au plus grand, laiſſant ce moindre au meſme état, la proportion deviendra triple, comme 2 à 4, double, 2 à 6 triple, 3 à 6 double, 3 à 9 triple, &c. Si on luy ajoûte deux fois, elle ſera quadruple 4 à 8 double, 4 à 16 quadruple, 5 à 10 double, 5 à 20 quadruple. Si trois fois elle ſera quintuple 6 à 12 double, 6 à 30 quintuple. Si quatre fois, ſextuple, & ainſi à l'infiny elle ſera multiple deux rangs davantage que le nombre de fois que le moindre nombre aura eſté ajoûté au plus grand dans la proportion double: parce qu'en effet le moindre eſtoit déja deux fois dans le plus grand.

Comme au contraire autant de fois qu'on retirera le moindre nombre du plus grand, la proportion abaiſſera ſeulement autant de rangs qu'on le retirera de fois. Si de la proportion quintuple, on ne le retire qu'une fois, elle deviendra quadruple, &c.

Ce changement de proportion ſe fait en laiſſant un des nombres, ſçavoir le moindre ſans changement, & en ajoûtant ou retirant le moindre nombre du plus grand; ce qui revient à l'augmentation ou diminution des puiſſances, dont nous avons parlé dans les progreſſions multiples Geometriques.

Voicy une autre maniere de changer les proportions, en ajoûtant ou retirant deux autres nombres des deux de la proportion donnée.

Si de deux nombres pairs en proportion triple, on ôte de chacun d'eux la moitié du moindre nombre, les diminuez seront en proportion quintuple. Exemple. Si de 36 & 12 on ôte de chacun 6, il restera 30 & 6 en proportion quintuple. Si de 30 & 10 on ôte 5, il restera 25 & 5, &c.

Comme au contraire, si à deux nombres en proportion quintuple, on ajoûte à chacun d'eux le moindre nombre, les augmentez seront en proportion triple. Exemple. De 6 & 30 viennent 12 & 36, de 4 & 20, 8 & 2, &c.

Avant que de donner la maxime pour les nombres impairs, il faut remarquer que tous les nombres impairs ont alternativement un nombre pair & un nombre impair pour leur plus grande moitié, 3 a 2, 5 a 3, 7 a 4, 9 a 5, 11 a 6; & de mesme à l'infiny; chacun ayant pour sa plus grande moitié le nombre qui détermine le rang qu'il tient parmy les impairs, en contant icy l'unité pour premier impair, quoy qu'en d'autres occasions nous ayons donné à 3 la qualité de premier impair. Ainsi 3 a 2 pour sa plus grande moitié, parce qu'il est le second impair, 5 a 3 parce qu'il est le troisiéme, & ainsi de tous les autres.

Voicy donc la Regle pour le changement des proportions en nombres impairs, dans les proportions comme la triple la quintuple, la septuple qui ont leur multiplication par nombres impairs.

Si de deux nombres impairs en proportion triple, on ôte deux nombres ou pairs ou impairs distans entre eux de deux unitez, que le moindre soit ôté du moindre, & le plus grand du plus grand, & que le moindre de ces deux nombres qu'on ôtera, soit la plus grande moitié du moindre nombre impair; soit que cette plus grande moitié soit un nombre pair, soit qu'elle soit un nombre impair, alors la proportion deviendra quintuple. Exemple. Si de 33 & 11 qui sont en proportion triple, on ôte 8 & 6 qui ne sont éloignez que du binaire, & dont le moindre 6 est la plus grande moitié d'11, il restera 25 & 5 en proportion quintuple. De mesme de 27 & 9, si on ôte 7 & 5, il restera 20 & 4. Et si de 45 & 15 on ôte 10 & 8, il restera 37 & 7, &c.

Comme au contraire si à deux nombres impairs en proportion quintuple, on ajoûte deux nombres pairs éloignez du binaire, le moindre au moindre, & le plus grand au plus grand, & que le moindre de ces deux nombres pairs ne soit elevé que de l'unité au dessus du moindre nombre impair, alors la proportion deviendra triple, comme si à 3 & à 15 qui sont en proportion quintuple, on ajoûte 4 & 6, dont le moindre 4 n'est elevé que de l'unité au dessus de 3 le moindre nombre de la proportion, il viendra 7 & 21 en proportion triple. De mesme si à 5 & 25, on ajoûte 6 & 8, il viendra 11 & 33. Et si à 7 & 35 on ajoûte 8 & 10, il viendra 15 & 45. Si à 9 & 45 on ajoûte 10 & 12, il viendra 19 & 57, &c.

C'est par ce moyen qu'on répond à la question que fait Clavius, quels sont es deux nombres en proportion quintuple, au moindre desquels ajoûtant 4 & au plus grand 6, il en vient une proportion triple. Car on con-

noiſt par 4 & par 6 qu'il faut neceſſairement que ce ſoient deux nombres impairs qui ſont en proportion quintuple, & ainſi 4 fait connoiſtre que le moindre de cette proportion eſt 3, & par conſequent que le plus grand eſt 15, auſquels ajoûtant 4 à 3 & 6 à 15, il vient 7 & 21 en proportion triple.

Et de meſme on donnera la ſolution de toutes les autres queſtions de cette nature, quand meſme on ne donneroit qu'un des nombres qu'il faudroit ajoûter à l'un des nombres de la proportion, pourveu qu'on ſpecifie ſi c'eſt au plus grand ou au moindre.

Si de deux nombres pairs en proportion quadruple, on ôte de chacun la moitié du moindre, la proportion deviendra ſeptuple. Exemple. Si de 6 & 24, on ôte 3 de chacun, il reſtera 3 & 21. Si de 8 & 32, on ôte 4 de chacun, il reſtera 4 & 28. Si de 10 & 40, on ôte 5 de chacun, il reſtera 5 & 35, &c.

Si de deux nombres pairs en proportion quintuple on ôte de chacun la moitié du moindre, la proportion deviendra noncuple. Si de 4 & 20 on ôte de chacun 2, il reſtera 2 & 18. Si de 6 & 30, on ôte de chacun 3, il reſtera 3 & 27, &c.

Si de deux nombres pairs en proportion ſextuple, on ôte de chacun la moitié du moindre, la proportion deviendra undecuple. Si de 8 & 48 on ôte de chacun 4, il reſtera 4 & 44, &c.

Si de deux nombres en proportion ſeptuple, on ôte de chacun la moitié du moindre, la proportion ſera tredecuple. Si de 4 & 28 on ôte 2 de chacun, il reſtera 2 & 26, &c.

Ainſi à l'infiny les proportions s'augmentant, en ôtant de chacun des deux nombres pairs le moindre du moindre, elles croîtront par les dénominations impaires qui ſont moindres d'une unité que le double des premieres proportions : de l'octuple, viendra la quindecuple : de la noncuple, viendra la dix-ſept-decuple, &c.

Comme au contraire ſi à chacun des deux nombres de ces proportions plus grandes, on ajoûte le moindre des deux nombres, les proportions deſcendront dans les meſmes dégrez de proportion comme elles avoient monté. De la ſeptuple viendra la quadruple ; comme ſi à 3 & à 21, on ajoûte 3, il viendra 6 & 24. De la noncuple viendra la quintuple ; de l'undecuple, la ſextuple, &c. comme il eſt aiſé de voir par les Exemples de tels nombres qu'on voudra prendre.

Quant aux proportions quadruples qui ont leur moindre nombre impair & le plus grand pair ; comme 5 & 20, 7 & 28, 9 & 36, &c. elles deviendront ſeptuples, ſi on ôte du moindre ſa plus grande moitié, & ſi on ôte du plus grand un nombre eloigné de quatre unitez du nombre qui reſte apres la plus grande moitié ôtée du moindre, qui en eſt ainſi la plus petite moitié. Comme ſi en la proportion quadruple 5 & 20, on ôte de 5 la plus grande moitié qui eſt 3, il reſtera 2 qui eſt ſa plus petite moitié, & ſi on ôte 6 de 20, par ce que 6 eſt éloigné de 2 de quatre unitez, il reſtera 2 & 14 qui ſont en proportion ſeptuple. Et ſi de 7 & 28, on ôte 4 & 7 il reſtera 3 & 21.

de 9 & 36 il restera 4 & 28, d'11 & 44, il restera 5 & 35, &c.

Dans les proportions quintuples en nombres impairs, comme 5 & 25, 7 & 35, 9 & 45, 11 & 55, &c. Si on ôte du moindre nombre sa plus grande moitié, & qu'on ôte du plus grand nombre un nombre eloigné de 5 unitez de la plus petite moitié du moindre nombre, la proportion deviendra noncuple. Exemple. De 5 & 25, ôtant 3 de 5 il restera 2, & ôtant 7 de 25, il restera 18, qui est en proportion noncuple avec 2. De mesme si de 7 & 35 on ôte 4 & 8, il restera 3 & 27; & si de 9 & 45, on ôte 5 & 9, il restera 4 & 36: si de 11 & 55 on ôte 6 & 10, il restera 5 & 45, &c.

Si dans les proportions sextuples, où il y a un nombre impair & l'autre pair, on ôte du moindre impair sa plus grande moitié, & du plus grand nombre, un nombre qui soit eloigné de six unitez du reste du moindre, la proportion sera undecuple. Exemple. Si de 5 & 30, on ôte 3 & 8, il restera 2 & 22. Si de 7 & 42, on ôte 4 & 9, il restera 3 & 33, &c.

Si dans les proportions septuples, où les deux nombres sont impairs, on ôte la plus grande moitié du moindre nombre, & du plus grand un nombre qui soit éloigné de la plus petite moitié du moindre nombre, de sept unitez, la proportion deviendra tredecuple. Comme si de 7 & 49 on ôte 4 & 10, il restera 3 & 39. Si de 9 & 63, on ôte 5 & 11, il restera 4 & 52, &c.

Ainsi de toutes les autres proportions, où il y a un ou deux nombres impairs, les proportions s'augmenteront d'une dénomination moindre de l'unité que le double de la proportion proposée; quand on ôtera du moindre des deux nombres de la proportion, sa plus grande moitié, & qu'on ôtera du plus grand, un nombre elevé au dessus de la plus petite moitié du moindre nombre, d'autant d'unitez que sera la dénomination de la proportion proposée; de huit unitez dans la proportion octuple, & la proportion deviendra quindecuple: de 9 dans la noncuple, & la proportion deviendra dix-sept-decuple: de 10 dans la decuple, & la proportion deviendra nondecuple, &c.

Comme au contraire les proportions descendront dans les mesmes degrez de proportion, comme elles avoient monté, si l'on ajoûte au moindre nombre, un nombre pareil & une unité davantage, c'est à dire si on le double avec une unité par dessus, & si l'on ajoûte au plus grand nombre un nombre qui soit elevé au dessus du moindre avant le changement, d'autant d'unitez qu'est la dénomination de la proportion proposée.

Ainsi de la septuple viendra la quadruple si on double le moindre nombre, & une unité par dessus, & qu'on adjoûte à ce moindre tel qu'il estoit avant le changement, quatre unitez pour en faire un nombre qu'on ajoûtera au plus grand. Si à 3 & 21 on ajoûte 4 & 7, on aura 7 & 28. Et de la noncuple viendra la quintuple par la mesme regle, comme si à 3 & 27 on ajoûte 4 & 8, on aura 7 & 35; si à 4 & 36, on ajoûte 5 & 9, on aura 9 & 45, de l'undecuple viendra la sextuple, &c. comme on peut voir par tous les Exemples qu'on voudra prendre.

Nous laissons beaucoup d'autres changemens de proportions en d'autres,

comme de la double en la sesquialtere, de la triple en la sesquitierce, de la quadruple en la sesquiquarte, de la quintuple en la sesquiquinte, & les autres à l'infiny; des multiples en leur surparticulieres de leur dénomination, qui se font toutes en ajoûtant le moindre terme au plus grand, & laissant le plus grand en son état, comme de la double on fait la sesquialtere, de 1 & 2, en transposant 1 ou l'ajoûtant à 2, & il vient 3, & laissant 2, ainsi l'on a 2 & 3: de mesme de 3 & 6, l'on a 6 & 9. Ainsi d'1 & 3, on a 3 & 4; d'1 & 4 on a 4 & 5, &c. Nous laissons dis-je tous ces changemens possibles parce qu'ils sont comme infinis, & faciles à trouver.

CHAPITRE XXXII.

Application de ces Maximes.

PAr ces Maximes on peut aisément resoudre toutes les Questions qui se font sur les changemens de proportions.

Par Exemple.

Deux freres ont partagé noblement l'argent de la succession de leur pere. L'aisné en a eu quatre fois autant que le cadet. Et le cadet ayant dissipé la moitié de sa part, & l'aisné ayant dépensé 3000 livres de la sienne, se trouve encore en avoir sept fois autant que son cadet. Combien y avoit-il d'argent dans la masse de la succession, qu'elle a esté la part de l'un & de l'autre, & combien leur en reste-t'il chacun? Réponse. Puisqu'une proportion quadruple telle qu'estoit celle du premier partage, ne peut devenir septuple, qu'en ôtant de chacun des deux nombres la moitié du moindre, lorsqu'il est dit que le cadet a dissipé la moitié de sa part, il ne reste plus qu'à ôter aussi à l'aisné une pareille somme pour les faire venir tous deux à une proportion septuple. Donc les 3000 livres que dépense l'aisné sont la moitié de ce qu'avoit le cadet; & par consequent le cadet avoit 6000 livres, & l'aisné 24000, qui est le quadruple de 6000, & l'un & l'autre en ayant moins de 3000, le cadet n'en a que 3000, & l'aisné 21000, qui sont en proportion septuple. Consequemment la masse qu'ils ont partagée estoit de 30000 livres, reduite à 24000 livres.

La solution de cette question & autres semblables, peut estre donnée par un raisonnement qui sert en ces occasions de ce qu'ils appellent preuve ou démonstration. Quand deux nombres sont quadruples l'un de l'autre, & qu'on ôte du moindre sa moitié, laissant le plus grand en son entier, la proportion devient octuple: Et si vous n'ôtez du plus grand qu'une partie des huit, la proportion devient septuple. Donc quand vous specifiez cette partie que vous ôtez du plus grand, c'est de mesme que si vous disiez qu'elle y estoit huit fois & qu'elle n'y est plus que sept fois. Et vous n'avez qu'à la multiplier par sa dénomination, & vous avez le plus grand nombre.

Comme ſept fois 3000, c'eſt 21000, & huit fois 3000, c'eſt 24000, qui eſt quadruple à 6000, comme 21000 eſtoit ſeptuple à 3000.

Autre Queſtion.

Deux Marchands trafiquent differemment, l'un a cinq fois l'argent de l'autre, & leurs ſommes ſont impaires, celuy qui en a le moins gagne 8000 livres, celuy qui en a le plus en gagne 10000, & ne ſont plus qu'en proportion triple. Combien avoient-ils d'argent, & combien en ont-ils chacun? Réponſe. Si à deux nombres impairs en proportion quintuple, on ajoûte deux nombres pairs éloignez du binaire, & que le plus petit de ces deux nombres pairs, ne ſoit éloigné du moindre nombre de la proportion que de l'unité, alors la proportion deviendra triple. Donc le Marchand qui avoit moins d'argent, avoit 7000 livres, puiſqu'on luy en ajoûte 8000, & l'autre qui en avoit cinq fois autant en avoit 35000, & par conſequent avec leurs additions ils viennent l'un à 15000 livres, & l'autre à 45000 livres, qui ſont en proportion triple.

CHAPITRE XXXIII.

MAXIME

Pour trouver deux nombres inconnus en proportion donnée, qui eſtant retirez de deux autres nombres donnez en moindre proportion, laiſſent chacun un reſte egal.

Il faut ſoutraire les deux nombres donnez l'un de l'autre, & diviſer le reſte par un nombre qui ſoit moindre d'une unité que le dénominateur de la proportion donnée des deux nombres inconnus, le quotient ſera le moindre nombre cherché, & ajoûtant à ce quotient la proportion donnée, on aura le plus grand non bre cherché, & ces deux nombres trouvez eſtant retirez des deux nombres donnez, laiſſeront un reſte egal.

I. Exemple. Quels ſont les nombres en proportion triple, qui eſtant retirez de 30 & de 16, laiſſent un reſte egal. Ayant ſoutrait 16 de 30, il reſte 14, qui eſtant diviſé par 2, qui eſt moindre d'une unité que 3 le dénominateur de la proportion triple donnée, donne 7 pour quotient & moindre nombre; auquel on donnera ſon triple 21; & retirant 7 de 16, reſte 9; & 21 de 30, reſte 9; ce qu'on avoit demandé.

Si l'on eut demandé une proportion double, les deux nombres euſſent eſté 14 & 28, & les reſtes 2 & 2.

Si l'on eût demandé une proportion quadruple, les deux nombres euſſent eſté $4\frac{2}{3}$ & $18\frac{2}{3}$ | & les reſtes égaux, $11\frac{1}{3}$, &c.

II. Exemple. Deux voleurs ayant pris l'argent de deux paſſants, dont

l'un avoit 25 pistoles & l'autre 40; ils leur offrent cette condition, qu'encore qu'ils n'ayent pas le double l'un de l'autre, neanmoins si celuy qui en a le plus leur peut donner le double de ce que donnera celuy qui en a le moins, & qu'il leur en reste autant à l'un qu'à l'autre, ils leur laisseront à chacun ce reste. Ces deux passans qui sçavoient cette maxime d'Arithmetique, satisfirent à leur desir: celuy qui avoit 25 pistoles en donna 15, & celuy qui en avoit 40 en donna 30, & il leur en resta chacun 10, qu'ils sauverent par ce moyen. Et ce qui est de remarquable, c'est qu'ils n'en pouvoient retenir ny plus ny moins, la proportion estant donnée telle: au lieu que si les voleurs leur eussent proposé une proportion moindre que n'estoit celle de leur argent qui estoit de 5 à 8, ils n'eussent jamais pû satisfaire à la condition, c'est à dire que le reste de part & d'autre n'eust point esté égal.

Reflexion sur cette Maxime, & sur la difference ou convenance avec d'autres.

IL y a trois manieres de tirer deux nombres inconnus, ou d'une somme qu'ils composent, en donnant seulement la difference qu'ils ont entr'eux, comme nous avons fait dans les Maximes de la Numeration; ou d'une somme donnée, en disant la proportion qu'ils ont entr'eux, comme si on donnoit la somme 100, pour en tirer deux nombres qui la composassent & fussent en proportion quadruple, on trouveroit 20 & 80, en divisant 100 par 5, qui est composé des deux termes de la proportion quadruple qui sont 1 & 4: ou enfin en donnant deux nombres desquels on demande qu'on en retire deux autres en proportion donnée, & qu'il y ait apres la soutraction un reste egal de part & d'autre, comme l'enseigne cette derniere Maxime qu'on peut étendre à un plus grand nombre de termes.

CHAPITRE XXXIV.

Conclusion de l'Analyse des Nombres.

A L'imitation ou plûtost sur le fonds de ces principales Maximes de Proportion, de Progression, & de Numeration, on en peut établir une infinité d'autres qui se découvriront dans les differentes Questions qu'on peut proposer sur les Nombres, & qui seront ainsi resoluës aussi bien par l'Arithmetique ordinaire que par l'Algebre.

Mais comme nous avons dit, l'Excellence de l'Algebre consiste en ce que l'on n'a besoin que d'une seule Regle pour resoudre toutes les questions possibles; par le moyen de laquelle, sans sçavoir, pour ainsi dire, ce que l'on fait, on voit sortir de ses mains les nombres inconnus, & qui mesme n'y estoient pas auparavant l'operation, comme par une espece de creation.

Pour rassembler en un Exemple beaucoup d'operations, & pour exercer

les Esprits des Curieux, nous finirons cette Analyse par une Question du temps: apres laquelle nous en rapporterons un grand nombre avec leurs Resolutions par l'Arithmetique ordinaire & par l'Algebre.

Question composée.

NEuf Princes désignez par les neuf premieres lettres de l'Alphabet, jaloux de la gloire d'un Grand Roy, se liguent pour s'opposer à ses Conquestes, & levent des troupes dans leurs Estats chacun selon ses forces. S'estant assemblez, ils en envoyent la liste à la diette qui se tient à la ville désignée par K, en cette maniere.

A, dit que s'il en avoit le sixiéme de B, le dixiéme de C, le seiziéme de D, le vingtiéme d'E, le douziéme d'F, le tiers de G, le neuviéme d'H, & le quinziéme d'I, il auroit 30000 hommes.

B, dit que s'il en avoit la moitié d'A, le cinquiéme de C, le huitiéme de D, le dixiéme d'E, le huitiéme d'F, le dixiéme de G, le sixiéme d H, & le dix-huitiéme d'I, il auroit 30000 hommes.

C, dit que s'il en avoit le quart d'A, le tiers de B, le quart de D, le cinquiéme d'E, le sixiéme d'F, le quinziéme de G, sans rien emprunter d'H, ny d'I, il auroit 30000 hommes.

D, dit qu'ayant le quadruple d'A, ou autant que B & C, il n'a besoin que d'un cinquiéme d'E, & d'un tiers d'F, pour avoir 30000 hommes.

E, dit que si on luy donnoit ce qu'ont A & B, il auroit 30000 hommes.

F, dit qu'avec la moitié d'A, & le quart de D, il auroit 30000 hommes.

G, dit que si on luy ôtoit la moitié de ce qu'il a, & qu'on luy rendit la moitié d'A, la moitié de B, la moitié de C, & le quart d'E, il auroit 30000 hommes.

H, dit que s'il avoit encore les troupes d'F, il s'en faudroit 30000 hommes, qu'il n'eut autant qu'I.

I, enfin dit qu'il a luy seul ce qu'ont ensemble F, G & H; & que neantmoins il a 30000 hommes moins que le Grand Roy, L, contre qui ils se liguent tous. Et comme il leur est si formidable qu'ils n'oseroient l'attaquer s'ils n'ont deux fois autant de troupes que luy, ils demandent à K, 4000 hommes qui leur manquent, sans quoy ils ne peuvent rien entreprendre. Qu'elles sont les troupes de chacun de ces alliez & d'L en particulier?

Solution.

A, 4000 hommes. B, 6000. C, 10000. D, 16000. E, 20000. F, 24000. G, 30000. H, 36000. I, 90000. K, donnant 4000, cela feroit 240000, le double de L, qui est 120000. Et ces nombres se trouveront en beaucoup de manieres données dans les Maximes, soit de Numeration, soit de Progression ou de Proportion. Pour en faciliter la Solution, voicy l'Operation d'un Exemple moins composé.

Question.

Combien y a-t'il de Soldats en chacune de ces trois Armées?

La premiere dit: Si j'avois le quintuple de la troisiéme & le double de la seconde, j'aurois 60000 hommes.

La seconde dit: Si j'avois le quadruple de la troisiéme & le double de la premiere, j'aurois 60000 hommes.

La troisiéme dit: Si j'avois le double de la premiere & le double de la seconde, j'aurois 60000 hommes.

Operation.

Par la Maxime établie dans la page 255, faites descendre le quintuple au quadruple, & le quadruple au triple: s'il y avoit quatre termes on feroit encore descendre le double au sesquialtere ou un & demy. Supposez, par la Regle de Fausse-Position, que la plus petite armée qui est icy la troisiéme, parcequ'elle vient à l'égalité des autres en empruntant moins de leurs parties qui sont par consequent plus grandes; soit 1, la seconde armée sera 3, & la premiere sera 4. Faites la Regle de Trois en commençant par où il vous plaira, & vous aurez le nombre de chaque armée par une seule. Les voylà toutes trois, d'où nous retranchons les zero, qu'on ne met qu'apres les operations.

La premiere Armée qui a 4, ayant pris le quintuple de la troisiéme, c'est à dire 5, puisque cette troisiéme n'a qu'1; & le double de la seconde, c'est à dire 6, puisque cette seconde n'a que 3: ces nombres 4, 5 & 6, ne font que 15 au lieu de 60. La Regle de Trois vous donnera le veritable nombre, ainsi: Si 15, 60, combien 4? 16: c'est à dire en ajoûtant les zero, 16000.

La seconde Armée qui a 3, prenant le quadruple de la troisiéme, c'est à dire 4, & le double de la premiere, c'est à dire 8, n'a que 15 au lieu de 60. La Regle de Trois donnera son veritable nombre. Si 15, 60, combien 3? 12, ou 12000.

La troisiéme Armée qui n'a qu'1, prenant le double de 4 qui est 8, & le double de 3 qui est 6, n'a que 15 au lieu de 60. Si 15, 60, combien 1? 4, c'est à dire 4000.

Tellement que les trois armées avoient ce nombre de Soldats; la premiere 16000; la seconde 12000; & la troisiéme 4000, & leur donnant à chacune ce qu'elles ont desiré, elles auront chacune 60000 hommes.

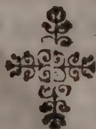
Vous auriez eu la mesme chose en prenant tels autres nombres qu'il vous auroit plû, pourveu qu'ils eussent gardé entr'eux la mesme proportion, comme 3, 9, 12: ou 6, 18, 24: ou 5, 15, 20: ou 7, 21, 28, &c.

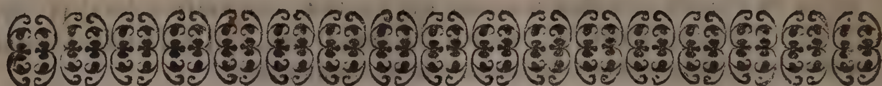
A propos de la Maxime que nous venons de citer de la page 255, remarquez que quand nous y avons dit qu'il falloit faire descendre les nombres inconnus d'un degré quant à la valeur, & que nous avons ajoûté, *& monter d'un degré quant à la dénomination*, cela ne s'entend que des soufmul-

tiples ou parties qui ſont moindre que l'entier, comme ſont des tiers, des quarts, des cinquiémes, & non pas des multiplies, qui deſcendant quant à la valeur, deſcendent auſſi quant à la dénomination.

Avis ſur les Queſtions ſuivantes.

REmarquez que nous appellons, Reſoudre par l'Algebre, lorſqu'on ſe ſert des figures ou caracteres de l'Algebre, au lieu des nombres inconnus : Reſoudre par l'Arithmetique ſans Algebre, quand on a beſoin des Maximes que nous avons établies dans cette Analyſe, ou d'autres ſemblables, que nous pretendons pouvoir ſuppléer à l'Algebre ; & Reſoudre par le ſeul Raiſonnement ſans Arithmetique, lorſqu'on le peut faire en raiſonnant ſur les conditions de la queſtion, quand meſme on employeroit ce qu'ils appellent les quatre Regles de l'Arithmetique, & la Regle de Trois, & meſme celle de Fauſſe-Poſition, qui ſont plûtoſt l'effet de la raiſon que de l'Art. C'eſt pourquoy les Anciens Grecs & Latins, comme Euclide, Nicomaque, Jamblichus, Theon & Boëce, n'ont jamais donné aucunes de ces Regles dans leurs Arithmetiques ; parce qu'ils les ſuppoſoient, comme connuës naturellement de tous les hommes, qui ſçavoient conter ſans art l'orſqu'ils eſtoient capables de raiſonner, & chez eux conter & raiſonner paſſoit pour la meſme choſe, comme auſſi ne ſçavoir pas conter & eſtre tout-à-fait ſtupide ou beſte. Quand donc ils diſoient qu'il falloit apprendre l'Arithmetique pour s'élever au deſſus de la nature humaine, ils entendoient parler de ces Maximes, pour leſquelles il faut une penetration d'eſprit plus grande que l'ordinaire. Nous pouvons tirer de là cette conſequence contre les Arithmetiques qu'on donne tous les jours au public, qui ne contiennent que ces quatre ou cinq Regles ; qu'elles ſont un ſecret reproche qu'on fait aux hommes d'avoir perdu leur raiſon, ou d'avoir beſoin d'un Art pour la mettre en uſage.





QUESTIONS RESOLUËS PAR L'ALGEBRE ET PAR L'ARITHMETIQUE ET QUELQUES UNES MESME QU'ON A ESTIMÉES TRES-DIFFICILES, PAR LE SEUL RAISONNEMENT.

I.

LES neuf Muſes donnerent chacune une Couronne de fleurs à chacune des trois Graces qui en avoient déja un certain nombre, comme auſsi les neuf Muſes s'en reſerverent un certain nombre; & leur dirent: Si nous vous en donnions encore les deux tiers de ce que nous vous en avons donné, vous en auriez 15 plus que nous, qui ſont le double & demy de ce que vous en aviez toutes trois, & les cinq douziémes de ce qui nous en reſte. Combien en avoient les neuf Muſes? combien leur en reſte-t'il? & combien les trois Graces en avoient elles chacune? & combien en ont elles receu?

Par l'Algebre.

Mettez pour les neuf Muſes, 1. j.
Pour les trois Graces, 1. z.
Nous mettons pour les trois Graces une racine ſeconde, ſeulement pour la diſtinction, ſans que cela change rien en l'operation.

Puis on opere ainſi ſuivant les conditions de la queſtion, qui d'1 j ôte trois fois 9, reſte 1 j — 27. & qui à 1 z ajoûte trois fois 9, il y a 1 z † 27. & qui d'1. j — 27 ôte les deux tiers de 27, c'eſt à dire 18, reſte 1. j — 45. & qui à 1. z † 27 ajoûte 18, c'eſt 1. z † 45.

Pour trouver l'égalité entre 1. j — 45 & 1. z † 45, & par meſme moyen toute la ſolution de la queſ-

Par l'Arithmetique.

Il faut commencer par la fin de la queſtion, & voir ce qui reſte aux neuf Muſes, & ce qu'avoient les trois Graces, par rapport au nombre 15 que la queſtion dit eſtre les cinq douziémes de ce qui reſte aux neuf Muſes & le double & demy de ce qu'avoient les trois Graces. Et quand on aura veu l'un & l'autre, on rendra aux neuf Muſes ce qu'elles avoient donné, ou on reprendra ce que les trois Graces avoient receu qui eſt d'abord 27, parce que les neuf Muſes donnant aux trois Graces chacune une Couronne, c'eſtoit trois fois 9 qui font 27; & puis les deux tiers de 27 qui font 18, & qui avec 27 font 45, que les unes

tion, il ne faut que regarder le rapport de 15, avec ce qu'avoient les trois Graces, & avec ce qui reste aux neuf Muses. Ce qui est facile à découvrir sans Algebre, & mesme sans Arithmetique.

ont receu & les autres donné, à quoy ajoûtant pour les trois Graces ce qu'elles avoient qui estoit 6, dont 15 est le double & demy, elles auront 51 : d'où retirant 15 qu'elles ont plus que les neuf Muses, il restera aux neuf Muses 36, dont 15 est les cinq douziémes, & rendant ainsi les 45 aux neuf Muses, elles en auront 81 qui sont chacunes 9. Ce que mesme on auroit trouvé sans Arithmetique.

Par le seul Raisonnement.

En commençant par le nombre que les trois Graces ont par dessus ce qui reste aux neuf Muses, on trouvera aisément la solution. Car entre tous les nombres, n'y ayant que 6 dont 15 soit le double & demy ; puisque deux fois 6 & la moitié de 6 font 15, on voit qu'en ajoûtant 6 à 45 qu'avoient receu les trois Graces, elles ont 51, & ôtant 15 de 51, qui est ce qu'elles ont par dessus les neuf Muses, il reste 36 qui est le nombre qui reste aux neuf Muses, auquel ajoûtant 45 qu'elles ont donné, il vient 81 qu'elles avoient. Ou si l'on veut commencer par le reste des neuf Muses par rapport à 15, on trouvera de mesme la solution. Car comme 15 est les cinq douziémes du seul nombre 36, puis qu'il contient cinq fois 3 qui est douze fois en 36, ajoûtant 45 à 36 elles avoient 81, ou ajoûtant 15 à 36 les Graces auront 51, & par consequent elles avoient 6, & les neuf Muses 81.

II.

Hesiode ayant demandé à Homere le nombre des soldats qui estoient au Siege de Troye : il luy répondit. Il y avoit sept feux, & devant chaque feu cinquante broches, & chaque broche nourrissoit neuf cens hommes.

Par l'Algebre, par l'Arithmetique, & par le Raisonnement, c'est la mesme operation. En multipliant 7 par 50 il vient 350, & multipliant 350 par 900, il vient 315000 pour le nombre des soldats.

III.

Pythagore estant interrogé sur le nombre de ses Ecoliers ; il répondit. La moitié étudie aux Mathematiques, le quart à la Physique, la septiéme partie se contente de m'entendre ; & par dessus il y a trois femmes.

Par l'Algebre.

Pour le nombre inconnu des Ecoliers mettez 1. j. or $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{7}$ de j. c'eſt à dire $\frac{25}{28}$ + 3, égaux à 1. j. donc 1. j. vaut 28 qui eſt le nombre des Eſcoliers de Pythagore; dont la moitié eſt 14 qui étudie aux Mathematiques; le quart c'eſt 7 qui étudie à la Phyſique, & la ſeptiéme partie eſt 4 qui écoute, cela fait 25, à quoy ajoûtant 3 femmes, c'eſt 28.

Par l'Arithmetique.

Il faut prendre le moindre nombre qui ait ſa moitié, ſon quart & ſon ſeptiéme ſans fraction, puis en ôter les parties demandées en la queſtion, & ajoûter le nombre énoncé. Or 28 eſt ce nombre, & ſa moitié, ſon quart, & ſon ſeptiéme, font 25, à quoy ajoûtant 3 on a 28 qui eſt le nombre cherché.

IV. V. VI. VII. VIII.

Si je vous donnois deux de mes piſtoles, vous en auriez autant que moy: Et ſi vous m'en donniez deux des voſtres,

IV.

I'en aurois autant que vous & la moitié par deſſus.

V.

I'en aurois trois quarts plus que vous.

VI.

I'en aurois le triple de vous.

VII.

I'en aurois quatre fois & la moitié plus que vous.

VIII.

I'en aurois deux fois & trois cinquiémes plus que vous. Combien en tous ces cas en avions-nous chacun?

Par l'Algebre.

Nous ferons ſeulement l'operation de la IV. Queſtion.

Mettez pour le premier ou plus grand nombre, 1. j. lequel ayant donné 2 piſtoles au ſecond, il luy reſte 1. j — 2. & c'eſt ce qu'a le ſecond quand il a receu 2 piſtoles. Si le ſecond rend les 2 piſtoles

Par l'Arithmetique, & par le Raiſonnement.

La Maxime pour reſoudre toutes les queſtions de cette nature a eſté donnée dans le V. Livre, chap. 22. & cy-deſſus page 308. qui eſt, de diviſer la diſtance donnée ou trouvée par le Raiſonnement, par la diſtance des deux moindres termes de la proportion où

qu'il a receuës, il luy reste 1. j — 4: & s'il donne 2 pistoles au premier, il luy reste 1. j — 6 pistoles; & le premier aura 1. j + 2 pistoles, que la question dit estre en proportion de 3 à 2 ou d'un & demy avec 1. j — 6 pistoles qu'a le second, & par consequent, en faisant la transposition, 2 j + 4 pistoles seront égales à 3 j — 18 pistoles, & la reduction faite, 1. j qu'on avoit mis pour le plus grand nombre, est égale à 22.

Et pour l'operation, quand celuy qui en a 22 en donne 2 à celuy qui en avoit moins, & qu'ils deviennent tous deux égaux, ils en ont chacun 20, & le moindre n'en avoit que 18, & quand ce moindre en donnera 2 à 22, il n'en aura plus que 16, & le premier en aura 24, qui seront en proportion de 2 à 3, & distans de 8. Laquelle distance de 8 en toutes ces questions, se trouvant par le raisonnement, en donnera la solution.

sont les nombres proposez ou inconnus, & puis multiplier separément le quotient par chaque terme de la proportion donnée. Ainsi ayant trouvé par le Raisonnement que les deux nombres en ces cinq questions sont distans l'un de l'autre de 4 dans le premier cas de la question, parce que le plus grand en donnant 2 au moindre, ils ne peuvent devenir égaux qu'ils ne soient distans de 4; & celuy qui en a le moins en donnant 2 au plus grand, ils deviennent distans de 8 dans le second cas de la question, qui est celuy apres lequel on énonce la proportion qu'ils ont entre eux, estant distans de 8. Donc en cette IV. Question, qui est la premiere des cinq icy assemblées, le moindre en avoit 18 & le plus grand 22: ils estoient venus à l'égalité à 20; & à la fin ils se sont trouvez à 16 & à 24 qui sont en proportion de 2 à 3, & distans de 8. Dans la V. ils estoient à $12\frac{2}{3}$ & à $16\frac{2}{3}$ ils estoient venus tous deux à $14\frac{2}{3}$, & à la fin à $10\frac{2}{3}$ & $18\frac{2}{3}$ en proportion de 4 à 7, & distans de 8. Dans la VI. ils estoient à 6 & à 10, & estoient venus tous deux à 8; puis enfin à 4 & à 12, en proportion triple, & distans de 8. Dans la VII. ils estoient à $4\frac{2}{7}$ & à $8\frac{2}{7}$; puis tous deux à $6\frac{2}{7}$, & enfin à $2\frac{2}{7}$ & à $10\frac{2}{7}$ en proportion de 2 à 9, & distans de 8. Dans la VIII. ils estoient à 7 & à 11, puis tous deux à 9, & enfin à 5 & à 13 qui sont aussi les moindres termes de leur proportion, & distans de 8.

IX.

Voylà un sac d'argent: vous croyez qu'il y a deux cens écus, & je vous dis qu'il s'en faut beaucoup, & que si vous me donniez la moitié, le tiers & le quart de ce qu'il y a dans le sac, & que je rendisse la douziéme partie de ce qui y estoit, alors j'aurois deux cens écus ou 600 livres. Combien y a-t'il dans le sac?

Par l'Algebre.

Pour le nombre inconnu je mets 1. j. & si on ajoûte $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, de j qui font 1 & $\frac{1}{12}$ de j. il y aura 2 j & $\frac{1}{12}$ de j. d'où ôtant $\frac{1}{12}$ de j, il restera 2 j. égales à 600 l. & divisant 600 par 2, il vient 300 l. ou 100 écus qui estoit l'argent que j'avois.

Par l'Arithmetique.

Il est certain que la moitié, le tiers & le quart de ce que j'ay, font autant que j'ay & un douziéme davantage. Si vous ôtez donc ce douziéme, j'en auray deux fois justement autant que j'en avois. Ainsi s'il se trouve qu'avec que ce que j'ay pris, j'ay deux cens écus ou 600 livres, assurément j'avois déja cent écus ou 300 l.

Par le seul Raisonnement.

Cette question est du rang de celles qu'on appelle badines, & il y a dequoy s'étonner comment d'habiles gens l'ont mise en question. Car c'est de mesme que si je disois, si j'avois encore 100 écus avec ce que j'ay, j'aurois 200 écus: Devinez combien j'ay?

X.

Vn voyageur fait tous les jours neuf lieuës, un autre part dix jours apres & fait tous les jours quatorze lieuës, en combien de jours le second atteindra-t'il le premier, & combien auront-ils fait de lieuës l'un & l'autre quand ils se rencontreront?

Par l'Algebre.

Mettez pour le nombre inconnu des jours 1. j. & pour l'operation multipliez d'un côté 1. j par 9, & puis luy ajoûtez 90, vous aurez 9 j † 90. & de l'autre côté multipliez 1. j. par 14, vous aurez 14 j égales à 9 j † 90. Et par reduction on aura 90, égaux à 5. j. divisez 90 par 5, il viendra 18.

Par l'Arithmetique.

C'est chercher un nombre qui estant multiplié par 9, & ajoûtant au produit 90, sera égal ou fera la mesme somme que lorsqu'il sera multiplié par 14. Or ce nombre se trouve mieux par l'Algebre, en posant 1. j. pour le nombre inconnu, & faisant l'operation comme elle a esté faite par l'Algebre.

Par le seul Raisonnement.

Puisque le second fait tous les jours cinq lieuës plus que le premier qui en avoit 90 d'avance sur luy, il ne faut que voir combien il y a de fois 5 en 90, afin qu'en autant de jours le second rencontre le premier; il y est 18 fois, & par consequent il le rencontrera en 18 jours, & ils auront fait tous deux chacun 252 lieuës, c'est à dire pour le premier, 90, & 18 fois 9 qui font 162, & avec les 90, 252: & pour le second, 18 fois 14 font 252.

XI.

Vn Bourgeois charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres, il leur donne à chacun sept deniers, & il luy en reste vingt-quatre : s'il leur en eut voulu donner à chacun neuf, il luy en auroit fallu trente-deux plus qu'il n'en avoit. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avoit-il de deniers?

Resolution par l'Algebre accompagnée d'Arithmetique & de Raisonnement.

Parce qu'il y a deux sommes diffrentes, l'une multipliée par 7, où il reste 24, & l'autre par 9, où il manque 32 : il faut mettre d'un côté 7 j † 24, & de l'autre 9 j — 32. & faisant la reduction il restera 2 j égales à 56, d'où il viendra par la division 28, qui est le nombre des pauvres, sur lequel faisant l'operation de la question, il viendra par 7, 196 & 24, c'est à dire 220, pour la somme de deniers qu'avoit le Bourgeois en sortant. On aura la mesme chose par 9; car 9 fois 28 font 252, d'où retirant 32, reste aussi 220.

XII.

Deux Messagers partent à mesme temps de deux villes, éloignées l'une de l'autre de 140 lieuës, pour aller d'une ville à l'autre par le mesme chemin, l'un fait chaque jour huit lieuës, & l'autre n'en fait que six, quand se rencontreront-ils?

Par l'Algebre.

Mettez 1. j. pour le nombre des jours, & faite, la Regle de Trois, pour chacun des Messagers. Si 1 jour donne 8 lieuës, cõbien en dõnera 1. j. de jours, 8. j. de lieuës. Si 1 jour, 6 lieuës, combien 1. j ? 6. j. Ils feront donc tous deux 14 j. de lieuës, c'est à dire 140 lieuës. Il y a donc équation entre 14 j. & 140. Et faisant la division, 1. j. vaut 10 jours. Ainsi ils se rencontreront à la fin du dixiéme jour, dont voicy la preuve. Si un jour donne 8 lieuës, combien

Par l'Arithmetique & par le Raisonnement.

Puisque celuy qui fait 8 lieuës par jour en fait tous les jours le tiers plus que celuy qui n'en fait que 6, ainsi quand le second jour le premier a fait 16 lieuës; le second en a fait 12, c'est à dire 4 ou son tiers moins que le premier. Le troisiéme jour, le premier en a fait 24 & le second 18, c'est à dire 6 moins, qui est le tiers de 18, &c. Ils se rencontreront quand le nombre du premier avec le nombre du second, composeront la somme de 140 lieuës, & que le plus grand aura le tiers par dessus le moindre comme il l'a toûjours. Ce qui se peut trouver d'abord par

10 jours, 80 lieuës? Si un jour donne 6 lieuës, combien 10? 60 lieuës. Le premier fera donc 80 lieuës en 10 jours, & le second 60 lieuës en 10 jours, lesquels font la somme de 140 lieuës.

la Regle établie dans la page 287; en assemblant les deux termes de la proportion de 3 à 4, qui font 7, & divisant le nombre proposé 140, par 7, & multipliant le quotient 20 par 3 & par 4, il viendra 60 & 80 qui font 140, & ils auront chacun employé 10 jours pour chacun leur nombre de lieuës.

XIII.

Quatre Officiers subalternes d'un Regiment, partagent entr'eux une somme de 448 écus, à telle condition que quand le premier, ou plus bas Officier en prendra 2, le second en prendra 3, le troisiéme 4, & le quatriéme 5. Combien feront-ils de partages, & combien auront-ils chacun?

Par l'Algebre.

Mettez le nombre des racines.

Pour le premier. 2. j.
Pour le second. 3. j.
Pour le troisiéme. 4. j.
Pour le quatriéme. 5. j

14. j. égales à 448.

448 estant divisé par 14 donne au quotient 32 pour la valeur d'1. j. qui est aussi les nombres des partages, ainsi 2 j. valent 64 écus pour le premier, 3 j. 96 écus pour le second, 4 j. 128 pour le troisiéme, & 5 j valent 160 pour le quatriéme, & toutes ces sommes font celle de 448 écus.

Par l'Arithmetique.

On trouve le nombre des partages & la part d'un chacun par la Regle precedente, en assemblant en une somme 2, 3, 4, & 5, qui font 14, par lequel on divisera la somme 448, & le quotient 32 qui sera le nombre des partages, estant multiplié par chaque nombre en particulier, donnera les parts d'un chacun. Sçavoir 64 pour le premier, 96 pour le second, 128 pour le troisiéme, & 160 pour le quatriéme, & toutes ces sommes font la somme 448.

XIV.

I'ay quatre diamans de differens prix, qui sont estimez tous quatre valoir 164 loüis d'or. Le premier en valeur vaut le double du second, le second vaut le triple du troisiéme, & le troisiéme vaut le quadruple du quatriéme. Combien valent-ils chacun?

Par l'Algebre.

Mettez pour le quatriéme qui est le moindre en valeur. 1. j.
Pour le troisiéme, 4. j.
Pour le second, 12. j.
Pour le premier, 24. j.

41. j. égales à 164.

164 estant divisé par 41 donne 4 pour la valeur d'une racine qui est le prix du moindre diamant.

Consequemment le troisiéme en vaut	16
Le second en vaut	48
Et le premier en vaut	96

Lesquelles sõmes particulieres font 164

Par l'Arithmetique.

Il faut assembler les moindres termes des proportions en commençant par le moindre, 1, 4, 12, 24, qui font 41, par lequel il faut diviser 164; & le quotient 4, le multiplier par chaque terme en particulier, il donnera par 1, 4 pour le moindre ou quatriéme diamant: par 4, il donnera 16 pour le troisiéme: par 12, il donnera 48 pour le second, & par 24 il donnera 96 pour le premier, & toutes ces sommes sont le prix des quatre diamans, 164 loüis d'or.

XV.

Trois soldats ayant mis la main sur une cassette, demeurerent d'accord de partager également & à l'amiable ce qui se trouveroit dedans: l'ayant ouverte & voyant que c'estoient des ducatons d'Espagne, ils se jetterent dessus & chacun en prit ce qu'il pût attraper. Puis ayant appaisé leur querelle, & s'estant entre-donnez ce qu'ils croyoient chacun avoir pris de trop, il se trouva que le premier ayant receu cinq pieces d'or du second, en eut autant que ce qui en restoit au second: Le second en ayant receu sept du troisiéme, en eut autant que ce qui restoit au troisiéme. Enfin le troisiéme en ayant receu neuf du premier, en eut trois fois autant que ce qui restoit au premier. Combien y avoit-il de ducatons, & combien chacun en avoit-il pris au pillage, & combien en eussent-ils eu chacun s'ils eussent partagé également?

Par l'Algebre.

Mettez 1. j. pour ce qu'avoit pris le premier. Quand il en a receu 5 du second, il a 1. j † 5, qui est égale au reste du second. Le second avoit donc 1. j † 10 avant qu'il en eût donné 5 au premier, & apres qu'il en a receu 7 du troisiéme, il a eu 1. j † 17, qui estoit égal au reste du troisiéme. Donc le troisiéme avoit 1. j † 24, avant que d'en avoir donné 7 au second. Et quand il en a receu 9 du premier, il a eu 1. j † 33, qu'on dit estre triple de ce qui reste au premier, sçavoir 1. j — 9, dont le triple qui est 3 j — 27, est égal à 1. j † 33. Et par transposition ayant ajoûté de part & d'autre 27, l'éga-

lité se trouve entre 1. j † 60 & 3 j. Et par la reduction ayant ôté de part & d'autre 1. j. l'égalité reste entre 60 & 2 j. Et divisant 60 par 2, il vient 30 pour le nombre du premier, & par consequent le second qui avoit 10 davantage en avoit 40. Et le troisiéme qui avoit 1. j † 24, en avoit 54. & la somme des ducatons estoit 124 que font 30, 40, & 54. Et apres qu'ils s'entrefurent donnez quelques pieces, le premier en eut 35 quand il en eut receu 5 du second, qui estoit aussi ce qui restoit au second. Le second en eut 47 quand il en eut receu 7 du troisiéme, qui estoit aussi ce qui restoit au troisiéme. Et le troisiéme qui en avoit 54, en eut 63 quand il en eut receu 9 du premier, qui estoit triple à 21, qui restoit au premier du nombre qu'il avoit pris. Et s'ils eussent partagé egalement les 124, ils auroient eu chacun 41 ducatons & $\frac{1}{3}$.

XVI.

Dans le dernier combat que Nicanor livra à Iudas Machabée, & où il fut tué, son armée qui estoit rangée en bataillons quarrez estoit composée outre ses troupes, des troupes auxiliaires de Syrie. Il y fut tué 35000 hommes: le reste prit la fuite au nombre de 156, sans conter les troupes auxiliaires de Syrie. Combien y avoit-il de soldats en toute l'armée, combien y en avoit-il dans les troupes auxiliaires, & combien Nicanor en avoit-il en son armée?

Par l'Algebre.

Pour cette armée rangée en quarré, mettez 1. ij. dans lequel seront compris les 35000 hommes tuez, les 156 fuyards, & le nombre inconnu des troupes auxiliaires. Pour ce nombre inconnu mettez 1. j. à quoy si vous ajoûtez les morts & les fuyards, vous aurez 1. j † 35156, égaux à 1. ij. La moitié du nombre de la racine est $\frac{1}{2}$ dont le quarré est $\frac{1}{4}$, qui estant ajoûté à 35156, c'est à dire $\frac{140624}{4}$, il viendra $\frac{140625}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{375}{2}$, c'est à dire 188 qui estoit le nombre des troupes auxiliaires, qui avec les 35156 qu'il avoit, font pour toute l'armée 35344, qui est un nombre quarré, dont la racine est 188.

XVII.

Vn homme en mourant laisse 3000 livres à partager entre sa femme & ses enfans, & veut que l'aisné de ses enfans ait le double de sa femme, & sa femme le double de son cadet & de sa fille, & que le cadet & la fille soient égaux.

Par

Par l'Algebre en deux manieres.

En commençant par le moindre nombre.			*En commençant par le plus grand*		
Mettez pour la fille.	1. j.	375	Pour l'aisné.	1. j.	1500
Pour le cadet.	1. j.	375	Pour la mere.	$\frac{1}{2}$ j	750
Pour la mere.	2. j.	750	Pour le cadet.	$\frac{1}{4}$ j	735
Pour l'aisné.	4. j.	500	Pour la fille.	$\frac{1}{4}$ j	735
	8 j. egales à 3000			2. j. égales à 3000	
	8			2 ..	
	(375			(1500	

Par l'Arithmetique.

Il faut diviser 3000 par autant de personnes qu'il y en a dans la question, en contant pour deux ceux qui ont le double. Ainsi il s'en trouvera 8, par lequel divisant 3000, il viendra à chacun 375, & à ceux qui ont le ble c'est 750, & le double de 750, c'est 1500.

XVIII.

Deux soldats viennent trouver leur Capitaine, & le plus fort le prie de partager un sac d'argent entre eux deux, en sorte que s'il y a cent écus il en veut avoir 40 plus que son camarade; s'il y en a 60, il en veut avoir 20 plus; s'il y en a 30, il en veut 8 davantage; enfin quelque nombre d'écus qu'il y ait, il dira ce qu'il veut de plus que son camarade, & prie son Capitaine de le satisfaire.

Par l'Algebre.

En commençant par le moindre nombre.

S'il y en a 100, & l'excez 40.	S'il y en a 60 & l'exc. 20	S'il y en a 30 & l'exc. 8.
Mettez pour le moindre 1. j.	Pour le moindre 1. j.	Pour le moindre 1. j.
Pour le plus grand 1. j. † 40	Pour le plus grād 1 j † 20	pour le plus grād 1. j † 8
Sōme 2 j † 40, égales à 100	2 j † 20, ég. à 60	2 j. † 8, ég. à 30.
Reduction 2 j. égales à 60	Red. 2 j. ég. à 40.	Red. 2 j. ég. à 22
$\frac{60}{2}$ (30 pour le moindre.	$\frac{40}{2}$ (20. & 40.	$\frac{22}{2}$ (11. & 19.
70 pour le plus grand.		

Et pour quelque nombre qu'il y ait il faudra mettre à la fin.
2 j. ég. à . . . & faire la division par 2. &c.

En commençant par le plus grand nombre.

Pour le plus grand.	1. j.	1. j	1. j
Pour le moindre.	1. j — 40	1. j — 30	1. j — 8
	2 j — 40 ég. à 100.	2 j — 20 ég. à 60	2 j — 8 ég. à 30.
Red. 2 j. ég. à 140	$\frac{140}{2}$ (70. & 30.	Red. 2 j ég. à 80	Red. 2 j. ég. à 38
		$\frac{80}{2}$ (40 & 20.	$\frac{38}{2}$ (19. & 11.

Par l'Arithmetique en trois manieres.

Voyez-les aux pages 246 & 248.

XIX.

Sept personnes charitables donnent à l'envy chacun une somme d'argent pour la Redemption des Captifs, & en supputant ce que les sommes de six ont par dessus un des sept, on trouve

Que le premier, second, troisiéme, quatriéme, cinquiéme & sixiéme, en ont donné 28000 liv. plus que le septiéme:
Le premier, 2, 3, 4, 5 & 7e. en ont donné 32000 plus que le 6e.
Le premier, 2, 3, 4, 6 & 7e. en ont donné 36000 plus que le 5e.
Le premier, 2, 3, 5, 6 & 7e. en ont donné 40000 plus que le 4e.
Le premier, 2, 4, 5, 6 & 7e. en ont donné 44000 plus que le 3e.
Le premier, 3, 4, 5, 6 & 7e. en ont donné 48000 plus que le second.
Enfin le second, le 3, 4, 5, 6, & 7e. en ont donné 52000 plus que le premier.

Qu'elle est la somme totale, & celle de chacun en particulier?

Ceux qui ont entrepris de resoudre ces sortes de questions par l'Algebre, ont remply quatre grandes pages, au lieu que par la Maxime établie dans la page 250, & pratiquée en la page 254, nous n'y employons pas plus de deux lignes.

Par l'Arithmetique.

Assemblez les excez en une somme, divisez-là par 5, & du quotient retirez en chaque excez; la moitié de chaque reste sera un des nombres inconnus. Ainsi la somme des excez 28000, 32000, 36000, 40000, 44000, 48000, & 52000, est 280000, qui est quintuple de la somme des nombres inconnus. Celle-cy est donc 56000, d'où retirant chaque excez l'un apres l'autre, & prenant la moitié de chaque reste on aura chaque nombre inconnu. Le premier sera 2000; le second 4000; le troisiéme 6000; le quatriéme 8000; le cinquiéme 10000; le sixiéme 12000; & le septiéme 14000, dont la somme totale est 56000: & les accouplant de six en six par rapport à un seul, on trouvera la solution de la question.

Remarque.

A propos de cette Maxime, il en faut établir icy une autre qui en eſt peu differente, pour la queſtion ſuivante ; où de ſept nombres on en prend ſix, & l'on en exclut toûjours un des ſept à chaque fois qu'on en met ſix enſemble, l'un apres l'autre. Et nous reſoudrons la queſtion par les premieres & ſecondes racines de l'Algebre & par l'Arithmetique, afin de faire voir l'avantage de nos Maximes pour la facilité des operations.

La Maxime ou Regle eſt donc, que quand on propoſe pluſieurs ſommes differemment aſſemblées à l'excluſion d'un de leur nombre à chaque fois, il faut prendre la ſomme totale des excez, la diviſer par le nombre des termes qui ſubſiſtent apres l'excluſion d'un ſeul; par exemple, par 6, quand il y a ſept nombres dont on en exclut un : par 5, quand il y a ſix nombres dont en exclut un de chaque ſomme, &c. du reſte, ou quotient de la diviſion il faut ôter chaque ſomme des excez, & il viendra à chaque operation le nombre qui avoit eſté exclus, comme nous allons voir dans la queſtion ſuivante, apres la Reſolution que nous en donnerons par l'Algebre.

X X.

Sept debiteurs doivent à un creancier des ſommes d'argent, qui ſont telles de ſix en ſix à l'excluſion d'un ſeul.

Les ſix premiers, ſans conter le ſeptiéme, doivent	994 écus.
Six autres, ſans conter le premier, en doivent	882
Six autres, ſans conter le ſecond, doivent	952
Six autres, ſans conter le troiſiéme, doivent	896
Six autres, ſans conter le quatriéme, doivent	910
Six autres, ſans conter le cinquiéme, doivent	840
Six autres, ſans conter le ſixiéme, doivent	1036

Quelle eſt la ſomme totale, & la dette d'un chacun?

Par l'Algebre.

I. Puiſque le ſeptiéme eſt exclus de la ſomme des autres, il faut mettre pour ſa dette 1.j. & ainſi il y aura pour cette premiere ſomme, 994 † 1.j.

II. Pour la dette du premier 1.2. & ainſi la ſeconde ſomme ſera 882 † 1.2.

III. Pour la dette du ſecond, 1.3. & cette ſomme ſera 952 † 1.3.

IV. Pour la dette du troiſiéme, 1.4. & cette ſomme ſera 896 † 1.4.

V. Pour la dette du quatriéme, 1.5. & cette ſomme ſera 910 † 1.5.

VI. Pour la dette du cinquiéme, 1.6. & cette ſomme ſera 840 † 1.6.

VII. Pour la dette du ſixiéme, 1.7. & cette ſomme ſera 1036 † 1.7.

Et par ce que toutes ces ſept ſommes, ſont ſommes totales, la ſomme totale de la dette y eſt ainſi miſe ſept fois, & il y aura ainſi ſix équations ou

égalitez, en comparant le premier nombre 994 avec chacun des autres séparement.

I. 994 † 1.j est égal à 882 † 1.2. Et ayant ôté 882 de part & d'autre, l'égalité restera entre 112 † 1.j. & 1.2. Et par consequent puisque l'on a mis pour la dette du premier 1.2. la dette de ce premier sera 112 † 1.j.

II. De mesme il y aura egalité entre 994 † 1.j. & 952 † 1.3. Et apres avoir ôté 952 de part & d'autre, elle restera entre 42 † 1.j. & 1.3 & ainsi la dette du second sera 42 † 1.j.

III. L'égalité sera de mesme entre 994 † 1.j. & 896 † 1.4. Et apres avoir ôté de part & d'autre 896, elle sera entre 98 † 1.j. & 1.4. & la dette du troisiéme sera 98 † 1.j.

IV. Ainsi il y aura egalité entre 994 † 1.j. & 910 † 1.5. Et apres avoir ôté de part & d'autre 910, elle restera entre 84 † 1.j. & 1.5. Et la dette du quatriéme sera 84 † 1.j.

V. Il y aura egalité entre 994 † 1.j. & 840 † 1.6. Et apres avoir ôté 840 de part & d'autre, elle restera entre 154 † 1.j. & 1.6. & ainsi la dette du cinquiéme sera 154 † 1.j.

VI. L'égalité sera de mesme entre 994 † 1.j. & 1036 † 1.7. Et apres avoir ôté 994 de part & d'autre, l'égalité restera entre 1.j. & 42 † 1.7. Et par une seconde transposition ayant ôté 42 de part & d'autre, l'égalité restera entre 1.j — 42 & 1.7. Et ainsi la dette du sixiéme sera 1.j — 42.

Et parce qu'on a mis 1.j. pour la dette du septiéme, on aura ainsi les dettes de tous les debiteurs par rapport à cette racine.

Dette du premier.	112 † 1.j.
Du second.	42 † 1.j.
Du troisiéme.	98 † 1.j.
Du quatriéme.	84 † 1.j.
Du cinquiéme.	154 † 1.j.
Du sixiéme.	1.j — 42.
Du septiéme.	1.j.

Ce qui fait la somme de 7 j † 448, egales à 994 † 1.j. lequel nombre 994 † 1.j. est egal à toute la dette comme nous avons veu. Ayant donc ôté 1.j. de part & d'autre, l'egalité sera premierement entre 6.j † 448 & 994, puis ôtant encore 448 de part & d'autre, l'égalité restera entre 6.j & 546. Et la division estant faite de 546 par 6, la valeur d'1.j sera 91, qui est la dette du septiéme, qui n'avoit qu'1.j. Apres quoy il sera aisé de trouver la dette de tous les autres. Car puisque la dette du premier estoit 112 † 1.j. sa dette sera 203, c'est à sçavoir 112 & 91. ainsi des autres, & la dette du sixiéme qui a 1.j — 42, sera 49, qui reste en ôtant 42 de 91. Telle est donc la Resolution de la question.

Dette	Du premier.	203	Somme de toutes les dettes, 1085 écus.
	Du second.	133	
	Du troisiéme.	189	
	Du quatriéme.	175	
	Du cinquiéme.	245	
	Du sixiéme.	49	
	Du septiéme.	91	

La preuve en est aisée. Car si vous ôtez la dette du septiéme qui est 91, les autres six devront 994 écus. Et si vous ôtez la dette du premier qui est 203, il restera pour la dette des six autres 882 écus; ainsi des autres. Cecy est tiré de l'operation de Clavius, accommodée à nos caracteres. Voicy nostre maniere.

Par l'Arithmetique.

La somme des excez 6510 estant sextuple de la somme totale des dettes, celle-cy sera 1085, de laquelle ôtant séparement chaque excez, le nombre de chacun viendra, & à chaque operation ce sera celuy qui avoit esté exclus du nombre, ou de la somme des autres.

Somme totale.	1085	1085	1085	1085	1085	1085	1085
Somme des excez.	882	952	896	910	840	1036	994
Dettes particulieres.	203	133	189	175	245	49	91.
	Du premier.	second.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e.

XXI.

Vn Pere de famille faisant sa provision de bled, apprend qu'il y a deux Marchands qui ont trois sortes de grains à differens prix dont il desire faire le mélange. Le premier vend le froment 30 s. le boisseau, 24 s. le seigle, & 20 s. l'orge. Le second, son froment 28 s. son seigle 22, & son orge 20. Il en veut prendre 100 boisseaux des trois sortes de chaque Marchand, en sorte neanmoins que le boisseau de mélange du premier ne luy revienne qu'à 22 s. c'est à dire 110 l. les cent boisseaux, & que le boisseau du second mélange luy coûte 24 s. c'est à dire 120 l. les cent boisseaux. Il demande aux plus habiles Arithmeticiens de la Ville, combien il prendra de boisseaux d'un chacun de ces differens grains, pour en faire un mélange de cent boisseaux à 110 l. du premier, à raison de 22 s. le boisseau, & à 120 l. du second, à raison de 24 s le boisseau. Ils luy disent tous que pour faire le premier mélange, il doit prendre du premier, 14 boisseaux & deux septiémes de boisseau de fro-

ment qui luy coûteront 21 l. 8 ſ. 6 d. *& ſix ſeptiémes de denier; & de ſegle* 14 *boiſſeaux, & deux ſeptiémes de boiſſeau qui luy coûteroit* 17 l. 2 ſ. 10 d. *& deux ſeptiémes de denier, avec* 71 *boiſſeaux & trois ſeptiémes de boiſſeau d'orge, qui vaudront* 71 l. 8 ſ. 6 d. *& ſix ſeptiémes de denier, & qu'ainſi il en aura* 100 *boiſſeaux mélez qui luy reviendront à* 110 l. *à raiſon de* 22 ſ. *le boiſſeau. Que pour le ſecond mélange, il doit prendre* 42 *boiſſeaux de froment, & ſix ſeptiémes de boiſſeau qui luy coûteront* 60 l. *& de ſeigle* 28 *boiſſeaux & quatre ſeptiémes de boiſſeau qui vaudront* 31 l. 8 ſ. *quatre ſeptiémes de ſols, & d'orge* 28 *boiſſeaux quatre ſeptiémes de boiſſeau, qui vaudront* 28 l. 11 ſ. *ſix ſeptiémes de ſols, ce qui fera* 100 *boiſſeaux qui vaudront* 120 l. *Ce Pere de famille qui n'avoit jamais oüy parler de ſeptiéme de boiſſeau, ny de ſeptiéme de denier, alla au marché où il trouva les deux Marchands plus ſçavans que les Arithmeticiens qu'il avoit conſultez, & qui luy firent voir la montre de tous les mélanges qu'ils pouroient faire de leurs grains, en les meſurant par boiſſeaux entiers, & luy donnerent à choiſir de tous ces mélanges de l'un & de l'autre prix, qui ne luy coûteroient pas davantage les cent boiſſeaux, quoy qu'il y eut dans un des mélanges beaucoup plus de froment que dans les autres. Et luy firent entendre que le Iuge de Police leur avoit ordonné de mettre le numero des boiſſeaux & la qualité des grains qui entroient dans le mélange, afin que perſonne ne fut trompé, & que le Marchand y trouvaſt toûjours ſon compte en retirant l'argent ſelon le prix & le nombre des boiſſeaux de chaque ſorte de grains.*

Quels eſtoient ces mélanges, & combien y en avoit-il de chacun?



Par nostre Arithmetique.

La ſolution en eſt dans la page 300; & nous la remettons icy pour corriger les fautes d'impreſſion, qui y ſont ſurvenuës dans la ligne 26.

Du premier Marchand qui vend ſon froment 30 ſ. le boiſſeau, ſon ſegle 24 ſ. & ſon orge 20 ſ. on en peut méler 100 boiſſeaux, qui à raiſon de 22 ſ. le boiſſeau du mélange, reviendront à 110 l. en ces neuf manieres.

à 30 ſ. le froment	2	4	6	8	10	12	14	16	18
à 24 ſ. le ſeigle	45	40	35	30	25	20	15	10	5
à 20 ſ. l'orge	53	56	59	62	65	68	71	74	77
Somme	100	100	100	100	100	100	100	100	100

valeurs.	3 l.	6 l.	9 l.	&c. en augmentant toûjours de 3. l.
	54 l.	48 l.	42 l.	&c. en diminuant toûjours de 6. l.
	5[illegible] l.	56 l.	59 l.	&c. en augmentant toûjours de 3. l.
Somme	110 l.	110 l.	110 l.	&c. ce ſera toûjours 110 l.

Du ſecond Marchand qui vend ſon froment 28 ſ. le boiſſeau, ſon ſegle 22 ſ. & 20 ſ. ſon orge; on en peut méler 100 boiſſeaux, qui à raiſon de 24 ſ. le boiſſeau du mélange reviendroit à 120 l. en ces ſeize manieres, & qui feront toutes une mixtion meilleure que les mélanges du premier Marchand, par ce qu'il y a toûjours plus de froment que d'orge.

à 28 ſ. fr.	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34
à 22 ſ. ſeg.	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
à 20 ſ. org.	47	44	41	38	35	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2
Somme	100	100	100	&c.												

valeurs	68 l. 12 ſ.	67 l. 4 ſ.	65 l. 16 ſ.	&c. en diminuant toûjours de 28 ſ.
	4 l. 8 ſ.	8 l. 16 ſ.	13 l. 4 ſ.	&c. en ajoûtant toûjours 4 l. 8 ſ.
	47 l.	44 l.	41 l.	&c. en diminuant toûjours de 3 l.
Somme	120 l.	120 l.	120 l.	

XXII. & derniere Queſtion.

Vn Prince faiſant voyage avec une ſuite d'1170 perſonnes diviſées en 39 bandes ou compagnies, compoſées chacune de 30 perſonnes de 4 differentes qualitez; ſçavoir de Seigneurs, de Gentilshommes-ſervans, de Dames, & de valets: il envoye ſon Intendant chez un Traiteur pour le diſner de ces 39 compagnies qui doivent paſſer ſucceſſivement; à condition que pour chaque compagnie il y aura

quatre tables, qui seront servies selon leurs differentes qualitez, & pour les quatre tables on payera 100 l. pour chaque disner, en donnant pour chaque Seigneur cinq livres; pour chaque Gentilhomme trois livres; pour chaque Dame deux livres; & pour chaque valet une livre. Le Traiteur qui croyoit bien sçavoir l'Arithmetique qu'il avoit apprise dans les Livres des bons Maistres de la Ville, & qui d'ailleurs raisonnoit assez juste lorsqu'il croyoit qu'il y auroit toujours plus de valets que de Maistres, accepta le marché; mais personne ne fut content, parce qu'il arriva tout autrement qu'il n'avoit pensé, à chaque venuë de compagnie. La premiere fois il y eut sept Seigneurs, vingt Gentilshommes, deux Dames, & un seul valet, & suivant la liste qu'on luy fit voir il devoit y venir sept bandes où il n'y auroit qu'un valet, & pour le plus il n'y en auroit dix qu'une seule fois, & les Seigneurs augmenteroient toûjours depuis sept jusqu'à seize, & diminueroient jusqu'à huit, & remonteroient jusqu'à quinze, & les autres qualitez qui varioient de mesme, tellement qu'encore que l'Intendant eut disposé ces trente personnes, en sorte que le nombre & la dépense de chaque qualité composoit toûjours le nombre de trente & la somme de cent livres; neanmoins les tables n'estant pas servies selon la qualité & le nombre des gens, il fut obligé dés le second jour de faire assigner le Traiteur devant le Iuge de Police, qui ne sçachant gueres d'Arithmetique envoya querir des experts pour examiner la liste que representoit l'Intendant, qui se trouva dans les regles mais d'une maniere qui leur estoit inconnuë. Le Iuge pour se tirer d'affaires condamna le Traiteur aux dépens, blâma les Arithmeticiens de n'avoir pas bien manié cette Regle dans leurs Livres, & fit faire un nouveau marché sur l'état representé par l'Intendant, ordonnant qu'à l'avenir on ne feroit plus de pareils traitez sans consulter les Maistres de l'Art, qui seroient obligez à peine de tous dépens, de donner sur chaque espece les differens changemens qui se pourroient faire en toutes les matieres de mixtions, mélanges, ou alliages. Et à son égard il prit la resolution d'apprendre l'Arithmetique à fonds, pour n'avoir plus la confusion de consulter des Maistres, en une chose où tout le monde doit estre sçavant.

Qu'elle estoit la disposition de ces trente personnes, qui en trente neuf manieres differentes dépensoient toûjours la somme de cent livres, en payant par teste selon leur qualité?

Par

Par l'Arithmetique.

Voicy les 39 changemens que peuvent faire 30 perſonnes de quatre differentes qualitez, en payant chacun differens prix, ſçavoir 5 livres pour les Seigneurs, 3 pour les Gentilshommes, 2 pour les Dames, & 1 pour les valets, qui doivent eſtre tellement diſpoſées que cela faſſe la ſomme de cent livres, & toûjours 30 perſonnes.

Nous laiſſons aux habiles Arithmeticiens à faire les Reflexions que merite l'ordre de ces Progreſſions, comme auſſi à tirer toutes les conſequences neceſſaires pour la diverſité des mélanges en nombres entiers, ſuivant la Remarque que nous en avons faite dans la page 295, avant l'Eſſay de noſtre nouvelle Methode.

Seigneurs.	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	15	14	13	12	11	10
Gentilshommes.	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	3	5	7	9	11	13
Dames.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4
Valets.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	8	7	6	5	+	3

Somme 30 | 30 | &c. toûjours 30.

Seig.	9	8		9	10	11	12	13	14	15	15	14	13	12	11	10	11	12	13	14
Gent.	15	17		14	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	8	6	4	2
Dam.	4	4		6	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
Val.	2	1		1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4

14	13	12		13
1	3	5		2
12	12	12		14
3	2	1		1

Valeurs 7 Seign. dépenſent 35 l. | 8 dép. 40 l. &c.
20 Gent. dép. 60 l. | 18 dép. 54 l. &c.
2 Dam. dép. 4 l. | 2 dép. 4 l. &c.
1 Val. dép. 1 l. | 2 dép. 2 l. &c.

Somme 30 perſonnes | dép. 100 l. | 30 | dép. 100 l. & toûjours de meſme.

FIN.



TABLE
DE LA SECONDE PARTIE
DE L'ART ET DE LA SCIENCE DES NOMBRES,
QUI TRAITE
DANS LES VIII. IX. ET X. LIVRES
DE L'ARITHMETIQUE SPECIEUSE OU ALGEBRE,
AVEC
UNE NOUVELLE ANALYSE DES NOMBRES.

LIBER OCTAVUS.

Arithmetica Speciosa seu Algebra.

LIBER NONUS.

De Regula Algebræ.

LIVRE DIXIE'ME.

Explication de l'Algebre en François.

FIN.

